[illegible]

[illegible] . [illegible]

[illegible] 0 [illegible] 1) [illegible] 1

[illegible] 2 [illegible] 3 4 [illegible]

[illegible]

1) [illegible] 1 [illegible] 6 [illegible]

[illegible]

[illegible] 2 [illegible] 3 [illegible] 7 [illegible] 8 [illegible]

[illegible]

. [illegible]

[illegible] , - [illegible] . , [illegible] **0** [illegible] **- 1** [illegible] **1** [illegible] **2** [illegible] **34** [illegible]

( )) ,
-
- .

1 . . 2 1
. . . 3 - 4. -
))

		3 : . ; ; ; ; ; ; ; ; ; ;	3 ; ; ; ; ;

5 6 785 9:7 .7 6:8 ,

. .
. (. - ,
.

.

:6:. :7 6 6 : : :79

"
. 2 1 . -
1 .

.) (3 3 ,	.) (3 3 ,	. 3 3	3 . 1 . .
3	. . - 4 . 1 (, 1 4 . 1 . -	3 - 4. 1 (, 1 3 4 - 1 1 (, 1 3 . 1 . 4 4 (, 1 . -	. 1 . . 4 4 1 1 . 1 - . 4 . . . 4 4 1 . . -

( )) , - - . / /			
1 . . 2 / 1 . . . / / - / 4. - / /))			
/		/ . ;;;;;;;;;;	;;;;;

			/ / / 1 . . / 4 . / / / / .. / 4 / 4 / 1

8:6 57 : 9:7 .7 6:8 , 8 9 7:

,

. .	/ /	/ . . /	/	/ . /
		. / 4 / 4 4 . 1 4 / / / / 4 4 . / 4 1 4 4 1 / . / 1 /		. / 2 .
	/	. / 4 . 4 . / 1 / . / 4 . . . / / / 4 . . / 4 / / . 1 /		. / 2 .

( )) , - - .			
1 . . 2 1 . . . 3 - 4. -))			
5		3 . ; ; ; ; ; ; ; ; ; ;	3 ; ; ; ; ;

		. 1 1 1		
		3 5 . 5 4 1 1 . 4 1 5 1 . 4 1 5 . 5 4 4 . . 5 1		. 5 2 .
	1	3 5 5 1 4 4) 5 5 . . 1 . 5 4 . 1 . 5 5 5 - - 1 1		. 5 2 .

2 . 4 4 .
1 5
3 . 1 5 1 5
1 - 5
(- , .

2 . 1

©))

( )) , - - .			
0 1 . 0 . 2 1 . . . - 4. -))			
6	9	.	

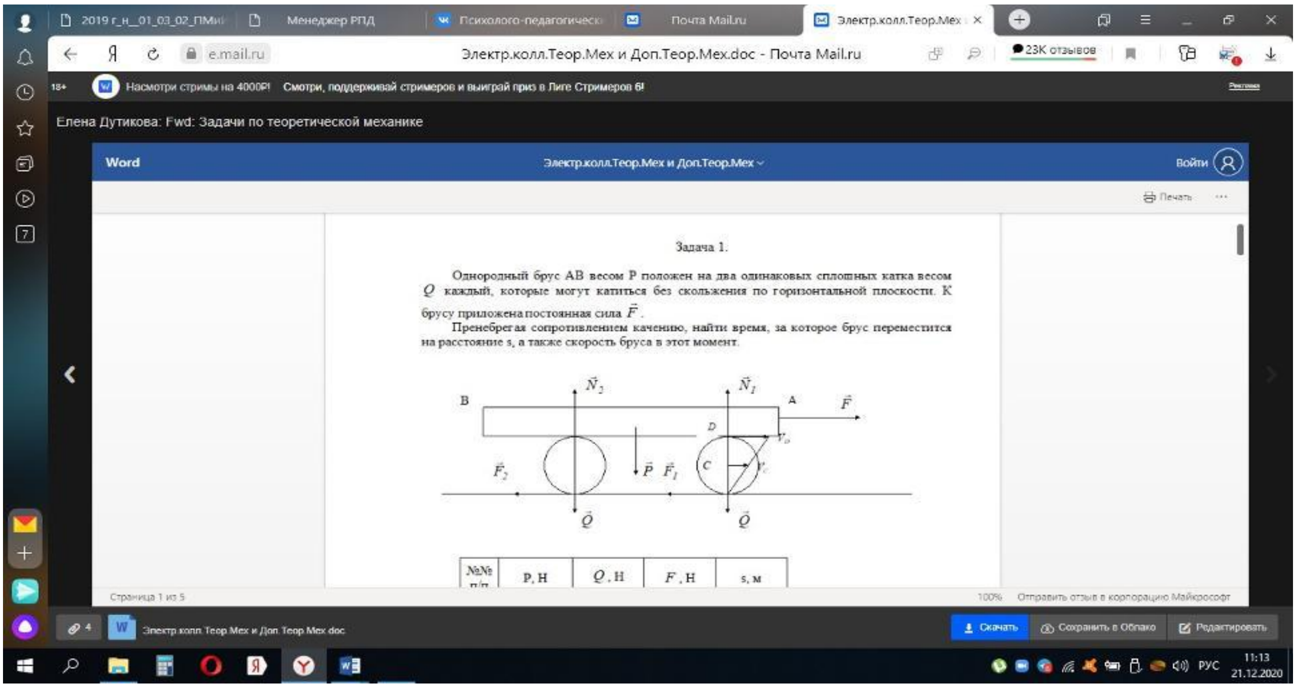
.

. . . .

.

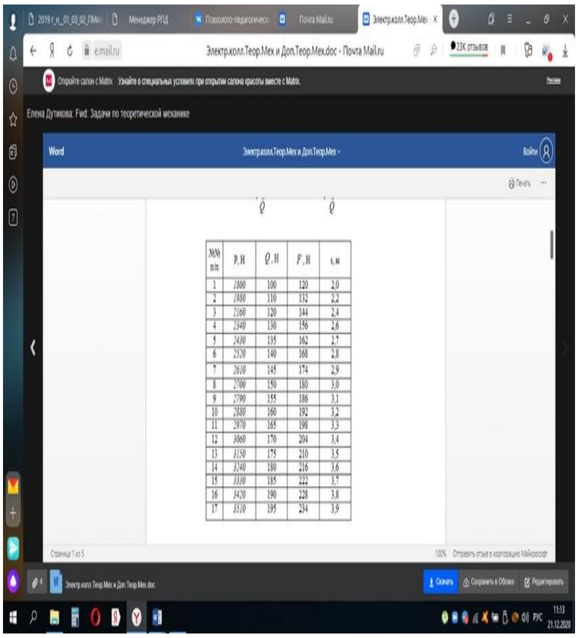
0 0 . 1

1



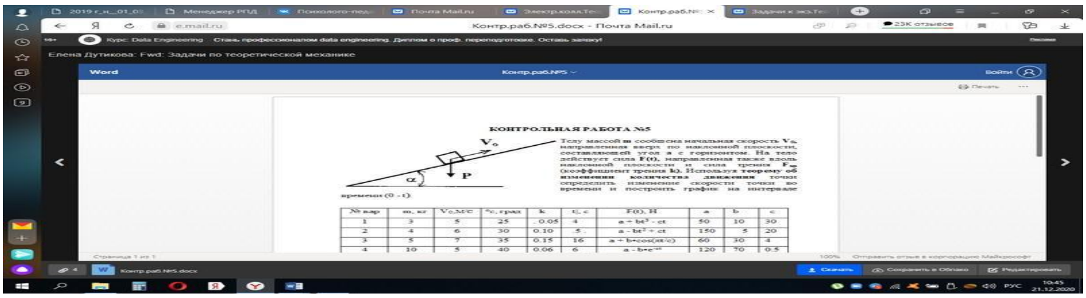
©))

( )) , - - .			
1 . . 2 1 . . . - 4. -))			
	7	.	



№№ п/п	P, Н	Q, Н	F, Н	s, м
1	1800	100	120	2,0
2	1980	110	132	2,2
3	2160	120	144	2,4
4	2340	130	156	2,6
5	2430	135	162	2,7
6	2520	140	168	2,8
7	2610	145	174	2,9
8	2700	150	180	3,0
9	2790	155	186	3,1
10	2880	160	192	3,2
11	2970	165	198	3,3
12	3060	170	204	3,4
13	3150	175	210	3,5
14	3240	180	216	3,6
15	3330	185	222	3,7
16	3420	190	228	3,8
17	3510	195	234	3,9

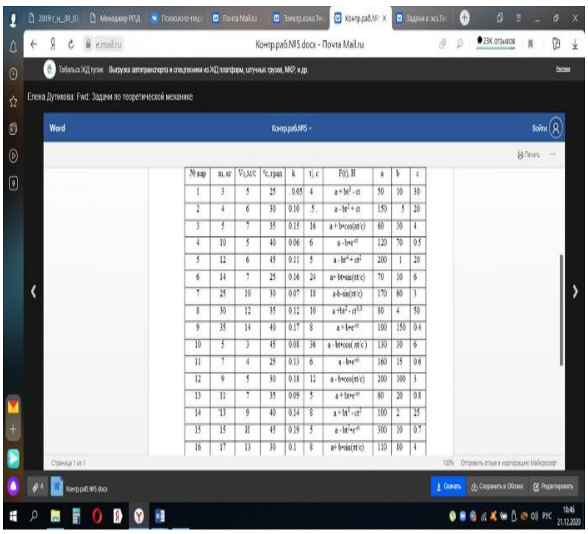
1



КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №5

Телу массой **m** сообщена начальная скорость V_0, направленная вверх по наклонной плоскости, составляющей угол **α** с горизонтом. На тело действует сила **F(t)**, направленная также вдоль наклонной плоскости и сила трения $F_{тр}$ (коэффициент трения **k**). Используя **теорему об изменении количества движения** точки определить изменение скорости точки во времени и построить график на интервале времени (0 - t)

№ вар	m, кг	V_0,м/с	°c, град	k	t_1, с	F(t), H	a	b	c
1	3	5	25	.0.05	4	$a + bt^3 - ct$	50	10	30
2	4	6	30	0.10	.5.	$a - bt^2 + ct$	150	5	20
3	5	7	35	0.15	16	$a + b\cdot\cos(\pi t/c)$	60	30	4
4	10	5	40	0.06	6	$a - b\cdot e^{-ct}$	120	70	0.5

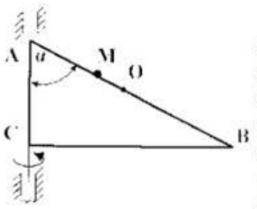


№ вар	m, кг	V_0,м/с	°c, град	k	t_1, с	F(t), H	a	b	c
1	3	5	25	.0.05	4	$a + bt^3 - ct$	50	10	30
2	4	6	30	0.10	.5.	$a - bt^2 + ct$	150	5	20
3	5	7	35	0.15	16	$a + b\cdot\cos(\pi t/c)$	60	30	4
4	10	5	40	0.06	6	$a - b\cdot e^{-ct}$	120	70	0.5
5	12	6	45	0.11	5	$a - bt^4 + ct^2$	200	1	20
6	14	7	25	0.16	24	$a + bt\cdot\sin(\pi t/c)$	70	10	6
7	25	10	30	0.07	18	$a \cdot b\cdot\sin(\pi t/c)$	170	60	3
8	30	12	35	0.12	10	$a + bt^2 - ct^{0.3}$	80	4	50
9	35	14	40	0.17	8	$a + b\cdot e^{-ct}$	100	150	0.4
10	5	3	45	0.08	36	$a - bt\cdot\cos(\pi t/c)$	130	30	6
11	7	4	25	0.13	6	$a - b\cdot e^{-ct}$	160	15	0.6
12	9	5	30	0.18	12	$a - b\cdot\cos(\pi t/c)$	200	100	3
13	11	7	35	0.09	5	$a + bt\cdot e^{-ct}$	60	20	0.8
14	'13	9	40	0.14	8	$a + bt^3 - ct^2$	100	2	25
15	15	11	45	0.19	5	$a - bt^2\cdot e^{-ct}$	300	10	0.7
16	17	13	30	0.1	8	$a + b\cdot\sin(\pi t/c)$	110	80	4

©))

	( )) , - - .	
1 . . 2 1 . . . - 4. -))		
	8	.

1



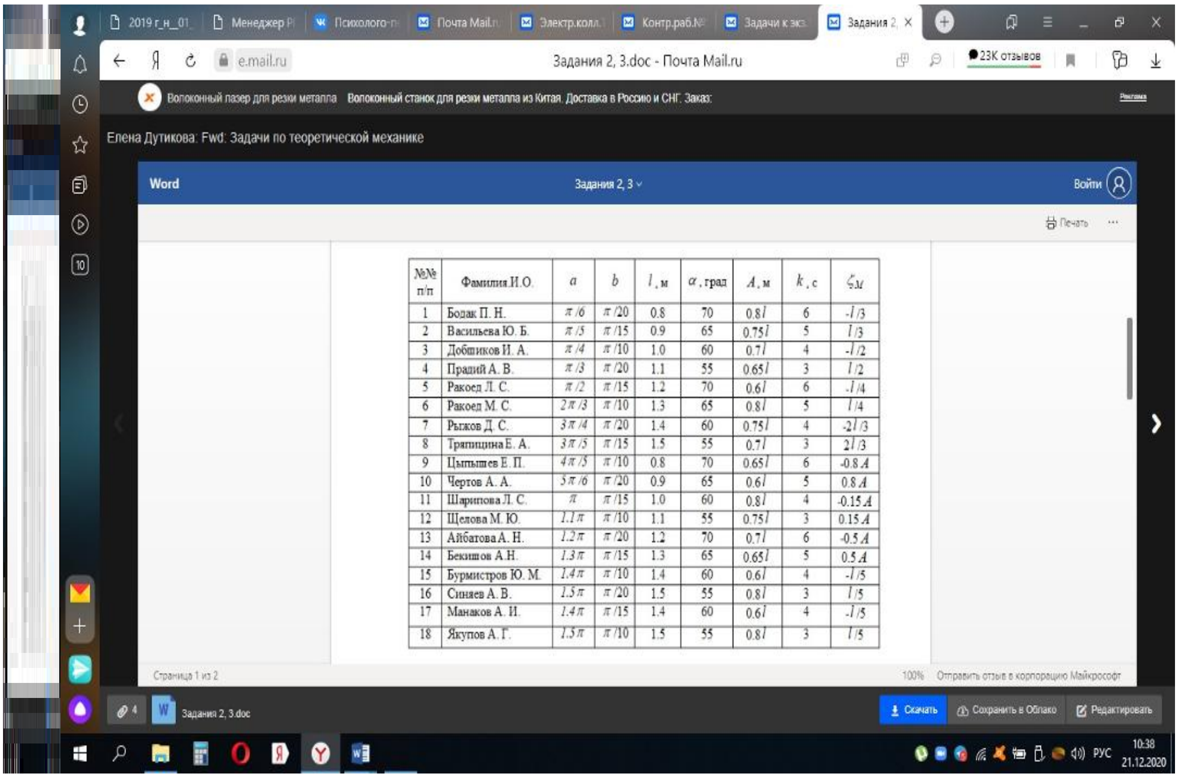
. .

.

.

. 1

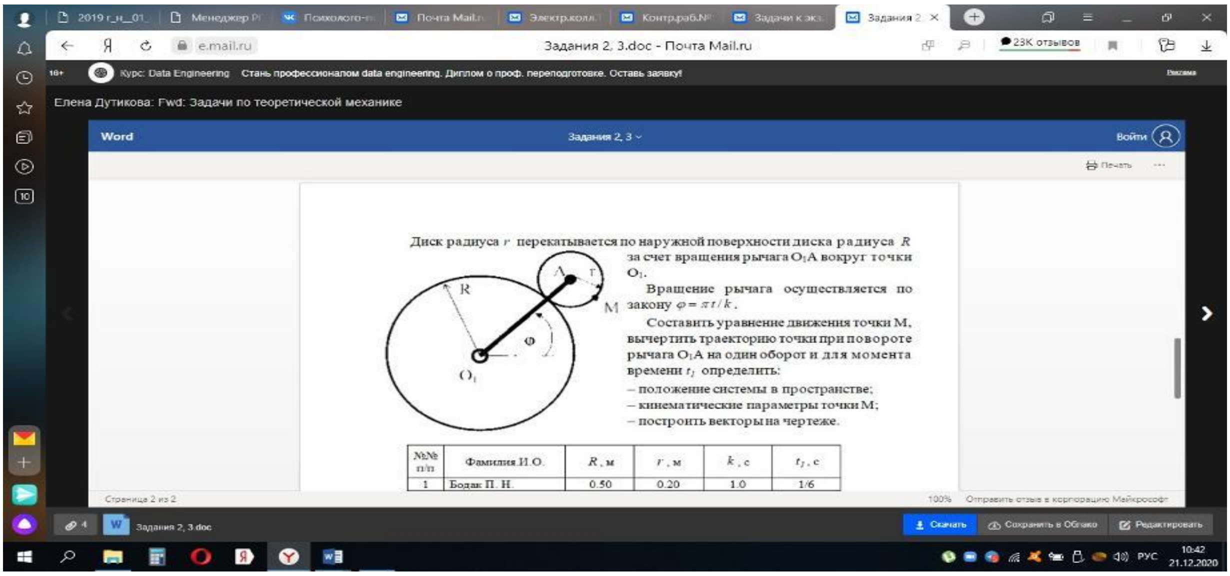
.



№№ п/п	Фамилия И.О.	a	b	l, м	α, град	A, м	k, с	ζ_M
1	Бодак П. Н.	$\pi/6$	$\pi/20$	0.8	70	$0.8l$	6	$-l/3$
2	Васильева Ю. Б.	$\pi/5$	$\pi/15$	0.9	65	$0.75l$	5	$l/3$
3	Добшиков И. А.	$\pi/4$	$\pi/10$	1.0	60	$0.7l$	4	$-l/2$
4	Праций А. В.	$\pi/3$	$\pi/20$	1.1	55	$0.65l$	3	$l/2$
5	Ракоед Л. С.	$\pi/2$	$\pi/15$	1.2	70	$0.6l$	6	$-l/4$
6	Ракоед М. С.	$2\pi/3$	$\pi/10$	1.3	65	$0.8l$	5	$l/4$
7	Рыжов Д. С.	$3\pi/4$	$\pi/20$	1.4	60	$0.75l$	4	$-2l/3$
8	Тряпицина Е. А.	$3\pi/5$	$\pi/15$	1.5	55	$0.7l$	3	$2l/3$
9	Цыпышев Е. П.	$4\pi/5$	$\pi/10$	0.8	70	$0.65l$	6	$-0.8A$
10	Чертов А. А.	$5\pi/6$	$\pi/20$	0.9	65	$0.6l$	5	$0.8A$
11	Шарипова Л. С.	π	$\pi/15$	1.0	60	$0.8l$	4	$-0.15A$
12	Щелова М. Ю.	1.1π	$\pi/10$	1.1	55	$0.75l$	3	$0.15A$
13	Айбатова А. Н.	1.2π	$\pi/20$	1.2	70	$0.7l$	6	$-0.5A$
14	Бекишов А.Н.	1.3π	$\pi/15$	1.3	65	$0.65l$	5	$0.5A$
15	Бурмистров Ю. М.	1.4π	$\pi/10$	1.4	60	$0.6l$	4	$-l/5$
16	Синяев А. В.	1.5π	$\pi/20$	1.5	55	$0.8l$	3	$l/5$
17	Манаков А. И.	1.4π	$\pi/15$	1.4	60	$0.6l$	4	$-l/5$
18	Якупов А. Г.	1.5π	$\pi/10$	1.5	55	$0.8l$	3	$l/5$

1 2

( )) , - - .			
1 . . 2 1 . . . - 4. -))			
	9	.	



Диск радиуса r перекатывается по наружной поверхности диска радиуса R за счет вращения рычага O_1A вокруг точки O_1.

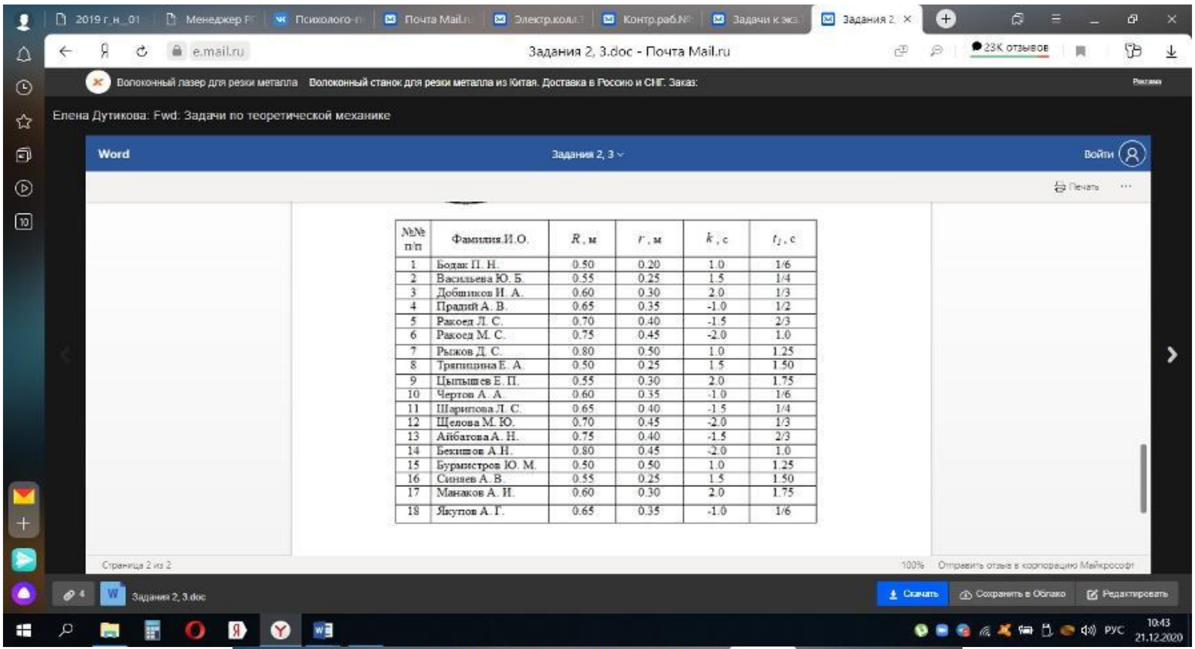
Вращение рычага осуществляется по закону $\varphi = \pi t / k$.

Составить уравнение движения точки M, вычертить траекторию точки при повороте рычага O_1A на один оборот и для момента времени t_1 определить:

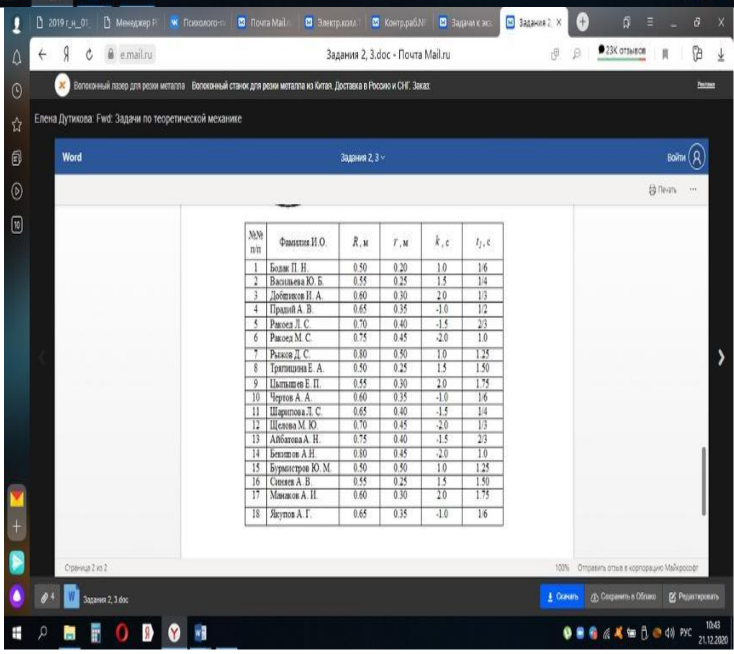
– положение системы в пространстве;
– кинематические параметры точки M;
– построить векторы на чертеже.

№№ п/п	Фамилия И.О.	R, м	r, м	k, с	t_1, с
1	Бодак П. Н.	0.50	0.20	1.0	1/6

( )) , - - .			
0 1 . 0 . 2 1 . . . - 4. -))			
		. ; ; ; ; ; ; ; ; ; ;	; ; ; ; ;



№№ п/п	Фамилия.И.О.	R, м	r, м	k, с	t_1, с
1	Бодак П. Н.	0.50	0.20	1.0	1/6
2	Васильева Ю. Б.	0.55	0.25	1.5	1/4
3	Добшиков И. А.	0.60	0.30	2.0	1/3
4	Прадий А. В.	0.65	0.35	-1.0	1/2
5	Ракоед Л. С.	0.70	0.40	-1.5	2/3
6	Ракоед М. С.	0.75	0.45	-2.0	1.0
7	Рыжов Д. С.	0.80	0.50	1.0	1.25
8	Тряпицина Е. А.	0.50	0.25	1.5	1.50
9	Цыпышев Е. П.	0.55	0.30	2.0	1.75
10	Чертов А. А.	0.60	0.35	-1.0	1/6
11	Шарипова Л. С.	0.65	0.40	-1.5	1/4
12	Щелова М. Ю.	0.70	0.45	-2.0	1/3
13	Айбатова А. Н.	0.75	0.40	-1.5	2/3
14	Бекишов А. Н.	0.80	0.45	-2.0	1.0
15	Бурмистров Ю. М.	0.50	0.50	1.0	1.25
16	Синяев А. В.	0.55	0.25	1.5	1.50
17	Манаков А. И.	0.60	0.30	2.0	1.75
18	Якупов А. Г.	0.65	0.35	-1.0	1/6



2

2

, 4

. . . .

, . 4

©))

( )) , - - .			
1 . . 2 1 . . . 3 - 4. -))			
5		3 . ; ; ; ; ; ; ; ; ; ;	3 ; ; ; ; ;

, . . -
, . . 4 4.
, . .

, . 4
. . . 4 4 5
. . 1 4
.
, . - 4 .
, . 4 . - 4 .
1 .
, . .

, . 5
4. 1 . . . 4. 1 5
4 .
, - 4 .
1 .
, . 4 . - 4 . 5
1 .
, . .
7
, 4 4 5
. 4 . . . 4 5
1
, . 4 .
. 1
, .
, . . .

4 . . 5
. 1
1 . 1
.
.
.
.

" " ( )) ,
- -

0 1 . 0 . 2 " 1
. . . " - 4. -
))

" 5		: . " ;;;;;;;;;;	;;;;;

2 6 :6 9:7 ,57 I 6 : .7 5 : 59

2

" 0 " . " - :
: .
. : . .
" . " . 5
. " . "
: . . 5

0 " . 0 .
. 1 . :

2

. 5 . . 0 5
. 0 "
. 5
" . 4 5
4 . . 4
. . 5
" . 4 .
. . . 1 "4
" . 4 . . " " 4
. " " 4 " 5
. "
" 1 " .
" 4
(,
. 4 "
" 4 4 . .
. . " 4 . 5
4 . . " " . . 5
1 . :
.
1 . 4 . 4 . 5
4 . . . 5
" 4- . 4 " "

" / 56	76 89	3 : / . " ;;;;;;;;;;	3 ;;;;;

. - / /
. 4 . 7
7 / 4 /
" / " . .
. . " 4- / 1 . 4 1
/ . " / / "
. " . / . / " " " 5
" " "- 4 / . / " 7

2

. .	/ .	. .	5 / / . 5 0
6	/ 7	/ 7. 87 76	3 56
9	1 1 " 1 " 7	/ 7. 87 76	3 56
	3 / . / 0 5 7	/ 7. 87 76	3 56
8	3 / . 14 . 5 1 7	/ 7. 87 76	3 56
	" " / 7	/ 7. 87 76	3 56
	. " " 7	/ 7. 87 76	3 56
	/ 7	/ 7. 87 76	3 56
	. 0 "1 5 1 7	/ 7. 87 76	3 56
	. / 7	/ 7. 87 76	3 56
6	. / 72 / 7	/ 7. 87 76	3 56
66	. 5 1 1 "7	/ 7. 87 76	3 56
69	. . 1 1 5 7	/ 7. 87 76	3 56
6	/ " 7	/ 7. 87 76	3 56
68	". . 1 5 1 7	/ 7. 87 76	3 56
6	/ 7	/ 7. 87 76	3 56
6	" " . / / 7	/ 7. 87 76	3 56
6	2 / / " / 5	/ 7. 87 76	3 56

( )) , - - .			
0 1 . 0 . 2 1 . . . 3 - 4. -))			
56	768 89	3 .	3

	7		
6	2 5 7	7. 87 76	3 56
6	2 7	7. 87 76	3 56
9	. 7 7	7. 87 76	3 56
96	3 7	7. 87 76	3 56
99	0 7 0 5 0 7	7. 87 76	3 56
9	2) 5 7	7. 87 76	3 56
98	0 . 7	7. 87 76	3 56
9	) 0 0 7	7. 87 76	3 56
9	. 0 7	7. 87 76	3 56
9	. . 7	7. 87 76	3 56
9	. 5 . 7	7. 87 76	3 56
9	. 7	7. 87 76	3 56
	7	7. 87 76	3 56
6	7	7. 87 76	3 56
9	. . 7	7. 87 76	3 56
	4 0 5 7	7. 87 76	3 56
8	7	7. 87 76	3 56
	3 0 .) 7	7. 87 76	3 56
	1 1 1 1 7	7. 87 76	3 56
	7	7. 87 76	3 56
	7	7. 87 76	3 56
	7	7. 87 76	3 56
8	3 0 . 5 7	7. 87 76	3 56
86	. 7	7. 87 76	3 56
89	0) 7	7. 87 76	3 56
8	) 7	7. 87 76	3 56
88	3 1 7	7. 87 76	3 56
8	3 0 . 5) 7	7. 87 76	3 56

2

( )) ,
-
- .

1 . . 2 1 . . . 3 - 4. -))			
5		3 : .	3

5

( ) ,
4 1 4
4 . 4 . . 5
4 . .
1
4. 4 4
. 4 . . . 1 .
. 1
4 . 5

.
4. 4 1 4
: 1 .
. (5 ,
4 5
4 5
3 : . 1 . . 5
4. :

6

) 2 $\bar{R}$ 1 1 .
4. : 1 4 $\bar{R}$
4 . . . 4

1 1 1 4 4
. : 1 4
1 1
. - $R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}$
2 . . 1 14 4
$R_x = 0,\ R_y = 0,\ R_z = 0$ 4 5

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \sum F_{kz} = 0.$$

- . 1 1
1 4 . : 1 1 1

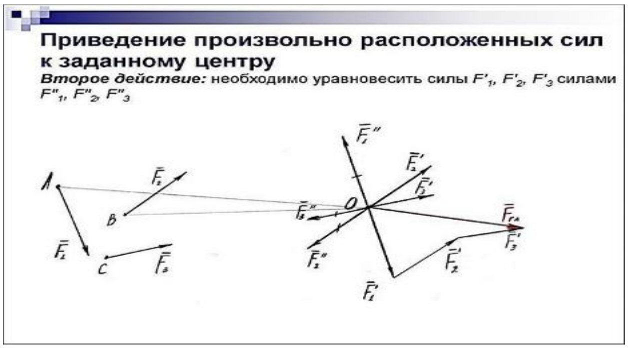
1 . 4 .
1 1 . 1 1 . 4 4
$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0,$
2 1 1 . 1 . 1 1 5

. - 1 5 4
1 . .
. 4

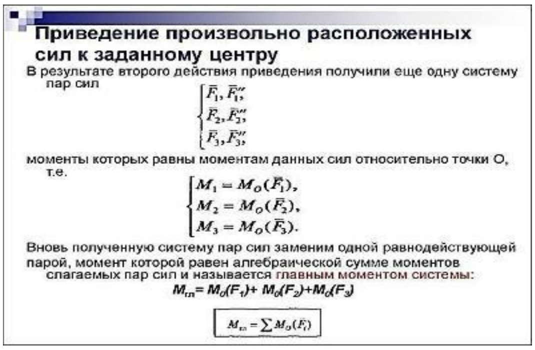
( )) , - - .			
1 . . 2 1 . . . - 4. -))			
6	6	.	

Приведение произвольно расположенных сил к заданному центру
Для того чтобы привести данную систему произвольно расположенных сил к заданному центру - точке О, необходимо выполнить два действия:
Первое действие: переносят по очереди каждую силу системы в центр приведения –точку О.
В результате получили новую плоскую ССС (F'1, F'2, F'3).
Силы её равны и параллельны данным силам, т.е.
F'1= F1, F'2= F2, F'3 = F3.

Приведение произвольно расположенных сил к заданному центру
Полученную ССС (F'1, F'2, F'3) заменяем равнодействующей силой, которая равна геометрической сумме данных сил и называется главным вектором системы:
Модуль главного вектора :
Направление главного вектора: cos(FгnX) = Fx/ Fгл

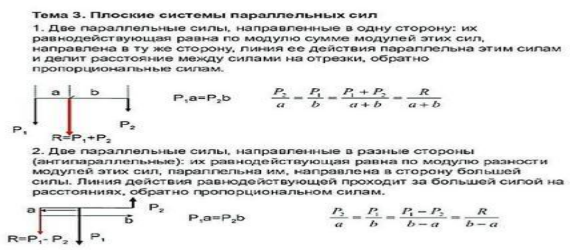


Приведение произвольно расположенных сил к заданному центру
Второе действие: необходимо уравновесить силы F'1, F'2, F'3 силами F"1, F"2, F"3

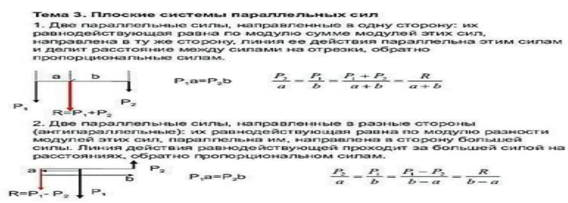


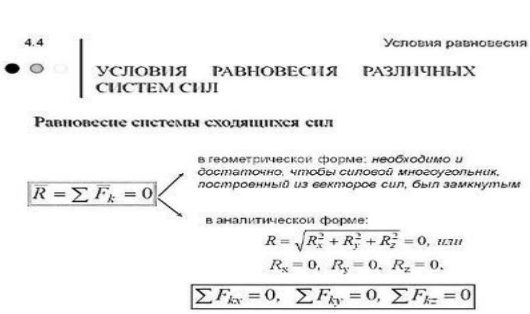
Приведение произвольно расположенных сил к заданному центру
В результате второго действия приведения получили еще одну систему пар сил
моменты которых равны моментам данных сил относительно точки О, т.е.
Вновь полученную систему пар сил заменим одной равнодействующей парой, момент которой равен алгебраической сумме моментов слагаемых пар сил и называется главным моментом системы:
Mгл= Mo(F1)+ Mo(F2)+Mo(F3)

2 "



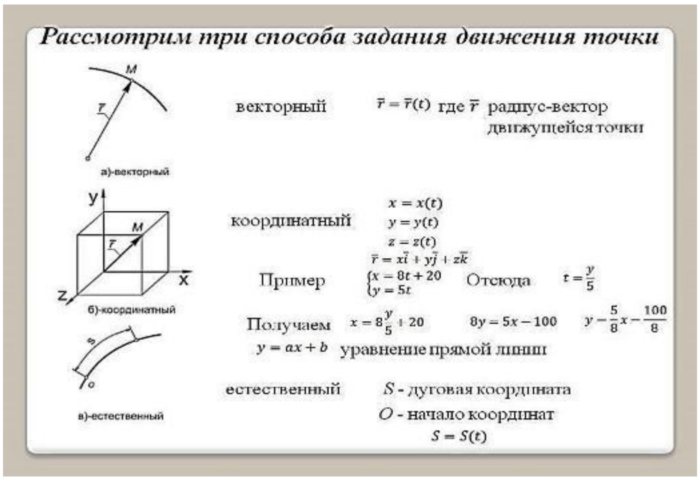
Тема 3. Плоские системы параллельных сил
1. Две параллельные силы, направленные в одну сторону: их равнодействующая равна по модулю сумме модулей этих сил, направлена в ту же сторону, линия ее действия параллельна этим силам и делит расстояние между силами на отрезки, обратно пропорциональные силам.
P1a=P2b
R=P1+P2
2. Две параллельные силы, направленные в разные стороны (антипараллельные): их равнодействующая равна по модулю разности модулей этих сил, параллельна им, направлена в сторону большей силы. Линия действия равнодействующей проходит за большей силой на расстояниях, обратно пропорциональном силам.
P1a=P2b
R=P1- P2





4.4
Условия равновесия
УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ СИЛ
Равновесие системы сходящихся сил
в геометрической форме: необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из векторов сил, был замкнутым
в аналитической форме:

4.3
Условия равновесия
УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ СИЛ
Равновесие пространственной системы произвольно расположенных сил
Равновесие пространственной системы параллельных сил
В случае, когда все действующие на тело силы параллельны оси z

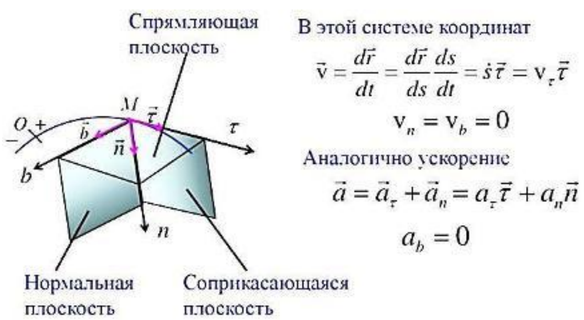


Рассмотрим три способа задания движения точки
M
а)-векторный
векторный
$\vec r = \vec r(t)$ где $\vec r$ радиус-вектор движущейся точки
y
M
x
z
б)-координатный
координатный
$x = x(t)$
$y = y(t)$
$z = z(t)$
$\vec r = x\vec i + y\vec j + z\vec k$
Пример
$\begin{cases} x = 8t + 20 \\ y = 5t \end{cases}$
Отсюда
$t = \frac{y}{5}$
Получаем
$x = 8\frac{y}{5} + 20$
$8y = 5x - 100$
$y = \frac{5}{8}x - \frac{100}{8}$
$y = ax + b$ уравнение прямой линии
в)-естественный
естественный
S - дуговая координата
O - начало координат
$S = S(t)$

3

2. Кординатный способ описания движения. Уравнения движения. Скорость и ускорение.
A (x, y, z)
Траектория
В этом способе с выбранным телом отсчета (в точке О) жестко связывают определенную систему координат, которая позволяет каждой точке пространства сопоставить три числа - координаты точки А этого пространства.
Наиболее распространенной является прямоугольная (декартова) система координат.
Тогда радиус-вектор и его модуль равны:
$\vec r = x\vec i + y\vec j + z\vec k$
$r = |\vec r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
Тогда скорость и ее модуль равны:
$\vec \upsilon = \upsilon_x \vec i + \upsilon_y \vec j + \upsilon_z \vec k$
$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}$
Тогда ускорение и ее модуль равны:
$\vec a = a_x \vec i + a_y \vec j + a_z \vec k$
$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
А проекции равны:
$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}$; $\upsilon_y = \frac{dy}{dt}$; $\upsilon_z = \frac{dz}{dt}$
$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$; $a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$; $a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$
Лекция 1. Кинематика материальной точки
7
+4

0 0

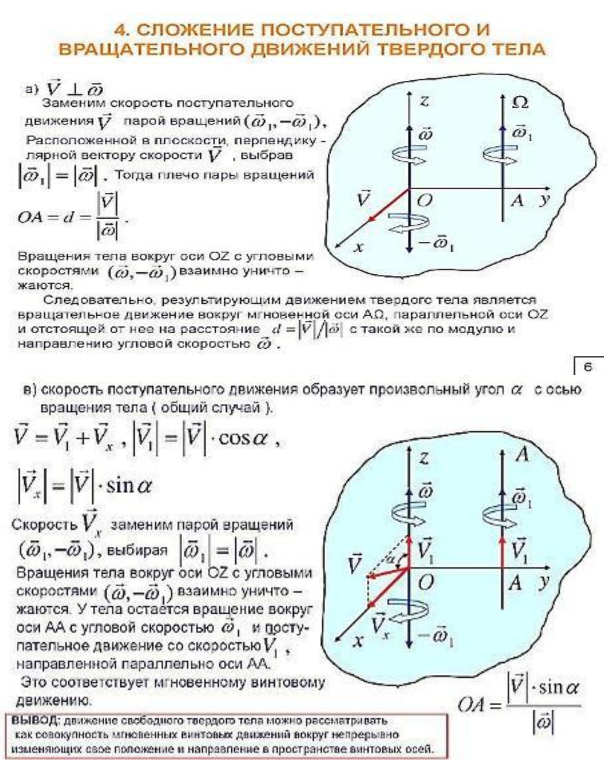


Спрямляющая плоскость
В этой системе координат
$\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = \frac{d\vec r}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot s\vec\tau = v_\tau \vec\tau$
$v_n = v_b = 0$
Аналогично ускорение
$\vec a = \vec a_\tau + \vec a_n = a_\tau \vec\tau + a_n \vec n$
$a_b = 0$
Нормальная плоскость
Соприкасающаяся плоскость

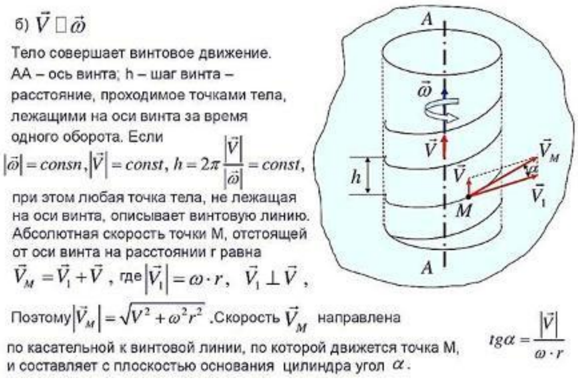
0

Поступательное	Вращательное
Равномерное	
$s = v \cdot t$	$\varphi = \omega \cdot t$
$v = const$	$\omega = const$
$a = 0$	$\varepsilon = 0$
Равнопеременное	
$s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$	$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$
$v = v_0 \pm a \cdot t$	$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon \cdot t$
$a = const$	$\varepsilon = const$
Неравномерное	
$s = f(t)$	$\varphi = f(t)$
$v = \frac{ds}{dt}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

0



4. СЛОЖЕНИЕ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА
а) $\vec{V} \perp \vec{\omega}$
Заменим скорость поступательного движения $\vec{V}$ парой вращений $(\vec{\omega}_1, -\vec{\omega}_1)$,
Расположенной в плоскости, перпендику - лярной вектору скорости $\vec{V}$, выбрав
$|\vec{\omega}_1| = |\vec{\omega}|$. Тогда плечо пары вращений
$OA = d = \frac{|\vec{V}|}{|\vec{\omega}|}$.
Вращения тела вокруг оси OZ с угловыми скоростями $(\vec{\omega}, -\vec{\omega}_1)$ взаимно уничто – жаются.
Следовательно, результирующим движением твердого тела является вращательное движение вокруг мгновенной оси AΩ, параллельной оси OZ и отстоящей от нее на расстояние $d = |\vec{V}|/|\vec{\omega}|$ с такой же по модулю и направлению угловой скоростью $\vec{\omega}$.
6
в) скорость поступательного движения образует произвольный угол α с осью вращения тела (общий случай).
$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_x$, $|\vec{V}_1| = |\vec{V}| \cdot \cos\alpha$,
$|\vec{V}_x| = |\vec{V}| \cdot \sin\alpha$
Скорость $\vec{V}_x$ заменим парой вращений $(\vec{\omega}_1, -\vec{\omega}_1)$, выбирая $|\vec{\omega}_1| = |\vec{\omega}|$.
Вращения тела вокруг оси OZ с угловыми скоростями $(\vec{\omega}, -\vec{\omega}_1)$ взаимно уничто – жаются. У тела остается вращение вокруг оси AA с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ и посту- пательное движение со скоростью $\vec{V}_1$, направленной параллельно оси AA.
Это соответствует мгновенному винтовому движению.
$OA = \frac{|\vec{V}| \cdot \sin\alpha}{|\vec{\omega}|}$
ВЫВОД: движение свободного твердого тела можно рассматривать как совокупность мгновенных винтовых движений вокруг непрерывно изменяющих свое положение и направление в пространстве винтовых осей.



б) $\vec{V} \,\square\, \vec{\omega}$
Тело совершает винтовое движение.
AA – ось винта; h – шаг винта – расстояние, проходимое точками тела, лежащими на оси винта за время одного оборота. Если
$|\vec{\omega}| = consn, |\vec{V}| = const,\ h = 2\pi \frac{|\vec{V}|}{|\vec{\omega}|} = const,$
при этом любая точка тела, не лежащая на оси винта, описывает винтовую линию.
Абсолютная скорость точки M, отстоящей от оси винта на расстоянии r равна
$\vec{V}_M = \vec{V}_1 + \vec{V}$, где $|\vec{V}_1| = \omega \cdot r$, $\vec{V}_1 \perp \vec{V}$,
Поэтому $|\vec{V}_M| = \sqrt{V^2 + \omega^2 r^2}$.Скорость $\vec{V}_M$ направлена
по касательной к винтовой линии, по которой движется точка M, и составляет с плоскостью основания цилиндра угол α.
$tg\alpha = \frac{|\vec{V}|}{\omega \cdot r}$

4. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА
Выражают проекции мгновенной угловой скорости твердого тела, движуще- гося вокруг неподвижной точки, через углы Эйлера и их производные.
Тело участвует в сложном движении, состоящем из трех вращений:
с угловой скоростью $\dot{\varphi}$ вокруг оси Oz_1,
с угловой скоростью $\dot{\theta}$ вокруг линии узлов OK
с угловой скоростью $\dot{\psi}$ вокруг оси Oz
$p_1 = \omega_{x1},\ q_1 = \omega_{y1},\ r_1 = \omega_{z1}$
$p = \omega_x,\ q = \omega_y,\ r = \omega_z$
$p_1 = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi$
$q_1 = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi$
$r_1 = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}$
$p = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi$
$q = -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi$
$r = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta$
$ON \in Ox_1y_1$
$ON \perp OK$
$q_1 = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi$

2
0

	( )) , - - .		
0 1 . 0 . 2 1 . . . - 4. -))			
		.	

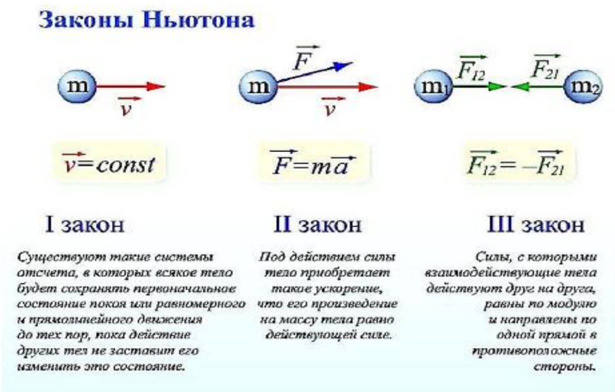
Скорости и ускорения точек твердого тела в общем случае движения. Уравнения движения твердого тела в общем случае движения записываются в виде

$$\left.\begin{aligned} x_O &= f_1(t), & y_O &= f_2(t), & z_O &= f_3(t), \\ \psi &= f_4(t), & \varphi &= f_5(t), & \theta &= f_6(t). \end{aligned}\right\}$$

Здесь x_O, y_O, z_O — координаты произвольной точки твердого тела, выбранной за полюс; ψ, φ, θ — углы Эйлера: угол прецессии, угол чистого, или собственного, вращения и угол нутации, определяющие поворот твердого тела вокруг полюса.

Скорость любой точки твердого тела в общем случае движения определяется формулой

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_1,$$



4

3

( )) , - - .			
1 . . 2 1 . . . - 4. -))			
		.	


2.3.1 Теорема об изменении количества движения точки
Теорема: Изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов всех действующих на точку сил за тот же промежуток времени.
$mV_1 - mV_0 = \sum \overline{S_i}$
Доказательство.
Основное уравнение динамики: $m\frac{d\vec{V}}{dt} = \Sigma \vec{F}_i$
Так как масса точки постоянна, то уравнение, выражающее основной закон динамики, можно представить в виде $\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \Sigma \vec{F}_i$
Проинтегрируем это уравнение, считая, что при $t_0 = 0$, $V = V_0$, а при $t = t_1$, $V = V_1$:
$\int_{V0}^{V1} d(m\vec{V}) = \int_0^{t1} \Sigma \vec{F}_i dt \Rightarrow mV_1 - mV_0 = \sum \overline{S_i}$
Представим полученное уравнение в проекциях на оси:
$mV_{1x} - mV_{0x} = \sum S_{ix}$
$mV_{1y} - mV_{0y} = \sum S_{iy}$
$mV_{1z} - mV_{0z} = \sum S_{iz}$


5. Теорема об изменении момента количества движения
Момент количества движения точки M относительно точки O равен
$\mathbf{K}_O = \mathbf{r}_{OM} \times \mathbf{Q} = m(\mathbf{r}_{OM} \times \mathbf{v})$
r
M
v
O
$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times m\mathbf{w} = \mathbf{r} \times m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) - \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) - \underbrace{\mathbf{v} \times m\mathbf{v}}_{0}$
$\boxed{\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}}$ $\boxed{\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O}$
$\mathbf{K}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ момент количества движения материальной точки относительно центра (точки O)
$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ момент силы, приложенной к точке, относительно центра
Производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно какого-либо центра равна моменту силы, приложенной к точке, относительно того же центра.

0


7. Теорема об изменении кинетической энергии
Теорема. Изменение кинетической энергии при импульсивном движении равно сумме скалярных произведений каждого ударного импульса на полусумму скоростей точки его приложения непосредственно перед ударом и после него:
$T^+ - T^- = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{I}_k^e \cdot \frac{\mathbf{v}_k^- + \mathbf{v}_k^+}{2} + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{I}_k^i \cdot \frac{\mathbf{v}_k^- + \mathbf{v}_k^+}{2}$
$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_k^2$
Доказательство
$m_k(\mathbf{v}_k^+ - \mathbf{v}_k^-) = \mathbf{I}_k \quad |\cdot(\mathbf{v}_k^+ + \mathbf{v}_k^-)$
$m_k((v_k^+)^2 - (v_k^-)^2) = \mathbf{I}_k \cdot (\mathbf{v}_k^+ + \mathbf{v}_k^-) \quad | \sum$
$2(T^+ - T^-) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{I}_k \cdot (\mathbf{v}_k^+ + \mathbf{v}_k^-)$

8 **0**

( )) , - - .			
1 . . 2 1 . . . - 4. -))			
		.	

9 0

3. Задача Циолковского

В пренебрежении всеми внешними силами (гравитация, сопротивление атмосферы) движение ракеты описывается уравнением

$$m\frac{dv}{dt} = -v_{\text{отн}}\frac{dm}{dt}$$

$$dv = -v_{\text{отн}}\frac{dm}{m}$$

$$v = -v_{\text{отн}}\ln m + C = v_{\text{отн}}\ln\frac{m_0}{m}$$

m_0 - начальная масса ракеты

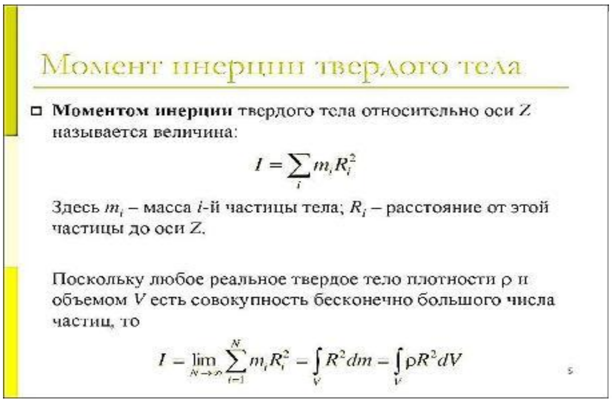
m_* - масса ракеты без топлива

z - число Циолковского

Формула Циолковского

$$\boxed{v_{\max} = v_{\text{отн}}\ln z \qquad z = \frac{m_0}{m_*}}$$

0



Момент инерции твердого тела

- **Моментом инерции** твердого тела относительно оси Z называется величина:

$$I = \sum_i m_i R_i^2$$

Здесь m_i – масса i-й частицы тела; R_i – расстояние от этой частицы до оси Z.

Поскольку любое реальное твердое тело плотности ρ и объемом V есть совокупность бесконечно большого числа частиц, то

$$I = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 = \int_V R^2 dm = \int_V \rho R^2 dV$$

5

Осевые моменты инерции:

$$I_z = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A z^2 dA;$$

Центробежный момент инерции:

$$I_{zy} = \int_A zy dA$$

Полярный момент инерции относительно точки o:

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA \qquad I_\rho = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_y + I_z$$

ρ - расстояние от начала центральных осей до элементарной площадки dA

12

0 4

Теорема Гюйгенса-Штейнера: момент инерции относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс J_0, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между ними a^2.

$$J = J_0 + ma^2.$$

$$J = J_0 + ma^2 = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2.$$

2

22. Вычисление моментов инерции относительно произвольных осей
Пусть для тела известны главные центральные моменты инерции I_x, I_y, I_z
Дана прямая L. Как вычислить для нее момент инерции?
1) Проводим прямую $l \parallel L$ через центр масс C
2) Находим углы α, β, γ между l и главными осями инерции
3) Вычисляем момент инерции относительно оси l
$I_l = (\cos\alpha \quad \cos\beta \quad \cos\gamma)\begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} =$
$= I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma$
4) По теореме Гюйгенса-Штейнера вычисляем момент инерции относительно оси L
$I_L = I_l + Md^2$
z
l
L
y
x
C
d

Главные оси сечения - это оси u и v, относительно которых
центробежный момент инерции $I_{uv} = 0$, а осевые моменты инерции I_u и I_v
имеют экстремальные значения max или min
$tg2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$
Главные центральные оси - это
главные оси проходящие через центр тяжести
сечения
Главные моменты инерции
$I_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$
y
v
u
α
α
x
o

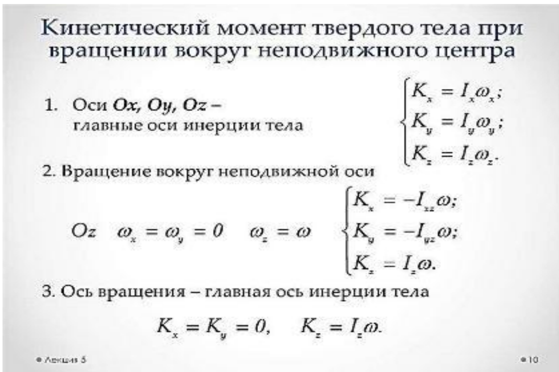
1. Напоминание: эллипсоид инерции
z
2a
2b
2c
y
x
$C = M(b^2 + a^2)/3$
$A = M(b^2 + c^2)/3$
$B = M(c^2 + a^2)/3$
$C > A > B$
$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$
$y_0 = \frac{1}{\sqrt{B}} > x_0 = \frac{1}{\sqrt{A}} > z_0 = \frac{1}{\sqrt{C}}$
Общий вид эллипсоида инерции «похож» на форму однородного тела
При геометрической интерпретации вращения ТТ удобно мысленно заменить его («вырезать из него») соответствующий эллипсоид инерции

3 0 0 4

( )) , - - .			
1 . . 2 1 . . . - 4. -))			
		.	

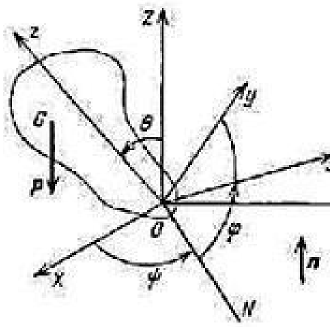
8. Вращение вокруг неподвижной оси
Рассмотрим твердое тело, имеющее 2 неподвижные точки O, O_1
$OXYZ$ неподвижная система координат
$Oxyz$ подвижная система координат, жестко связанная с телом
$\mathbf{F}, \mathbf{F}_1$ реакции связей в O, O_1
$\mathbf{R}, \mathbf{M}_O$ главный вектор и главный момент внешних сил
1) теоремы об изменении количества движения и момента количества движения (в неподвижной системе координат)
$M\frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = \mathbf{R} + \mathbf{F} + \mathbf{F}_1$
$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O + \overline{OO_1} \times \mathbf{F}_1$
2) переход в подвижную систему координат
$M\frac{\tilde{d}\mathbf{v}_C}{dt} + M\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_C = \mathbf{R} + \mathbf{F} + \mathbf{F}_1$ (1)
$\frac{\tilde{d}\mathbf{K}_O}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_O = \mathbf{M}_O + \overline{OO_1} \times \mathbf{F}_1$ (2)
воспользовались известным из кинематики фактом:
$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{a}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$
абсолютная производная
относительная производная
Z
z
F_1
O_1
h
F
C
y
O
Y
φ
X
x

0 **0**



Кинетический момент твердого тела при вращении вокруг неподвижного центра
1. Оси Ox, Oy, Oz – главные оси инерции тела
$K_x = I_x\omega_x$; $K_y = I_y\omega_y$; $K_z = I_z\omega_z$.
2. Вращение вокруг неподвижной оси
Oz $\omega_x = \omega_y = 0$ $\omega_z = \omega$
$K_x = -I_{xz}\omega$; $K_y = -I_{yz}\omega$; $K_z = I_z\omega$.
3. Ось вращения – главная ось инерции тела
$K_x = K_y = 0$, $K_z = I_z\omega$.
Лекция 5
10

8 **0**



Твердое тело с неподвижной точкой. Системы координат

n $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ – единичный вектор вертикали
OXYZ – неподвижная система координат
Oxyz – связанная система координат

$$\gamma_1 = \sin\theta\sin\varphi,\quad \gamma_2 = \sin\theta\cos\varphi,\quad \gamma_3 = \cos\theta.$$

Компоненты единичного вектора, выраженные через углы Эйлера

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{n}}{dt} - \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{n} = 0$$

Уравнение Пуассона в векторном виде

$$\mathbf{M}_O = P\mathbf{n}\times\overline{OG}$$

Момент силы тяжести в векторном виде

a, b, c – координаты центра масс в связанной системе координат

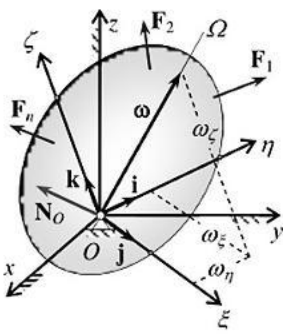
$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3,\quad \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1,\quad \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2.$$

Уравнение Пуассона в скалярном виде

$$M_x = P(\gamma_2 c - \gamma_3 b),\quad M_y = P(\gamma_3 a - \gamma_1 c),\quad M_z = P(\gamma_1 b - \gamma_2 a)$$

Момент силы тяжести в скалярном виде

8



$$\begin{aligned} I_\xi\dot{\omega}_\xi + (I_\zeta - I_\eta)\omega_\eta\omega_\zeta &= \sum_{i=1}^{n} m_\xi(\mathbf{F}_i),\\ I_\eta\dot{\omega}_\eta + (I_\xi - I_\zeta)\omega_\zeta\omega_\xi &= \sum_{i=1}^{n} m_\eta(\mathbf{F}_i),\\ I_\zeta\dot{\omega}_\zeta + (I_\eta - I_\xi)\omega_\xi\omega_\eta &= \sum_{i=1}^{n} m_\zeta(\mathbf{F}_i). \end{aligned} \qquad (12.23)$$

Элементарная работа силы *dA* равна скалярному произведению вектора силы на вектор элементарного перемещения точки

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Можно представить это уравнение в координатной форме:

$$dA = F_X\cdot dx + F_Y\cdot dy + F_Z\cdot dz$$

Полная работа силы на любом конечном перемещении M_0M_1 равна взятому вдоль этого перемещения криволинейному интегралу второго типа от элементарной работы:

$$A = \int_{M_0}^{M_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} \quad \text{или} \quad A = \int_{M_0}^{M_1} F_X\cdot dx + F_Y\cdot dy + F_Z\cdot dz$$

,

( )) , - - .			
1 . . 2 1 . . . - 4. -))			
6		.	

" **0**

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\chi}{\partial x_\nu}\delta x_\nu + \frac{\partial f_\chi}{\partial y_\nu}\delta y_\nu + \frac{\partial f_\chi}{\partial z_\nu}\delta z_\nu\right) = 0 \quad \chi = 1,2,\ldots,\vartheta$$

4 4

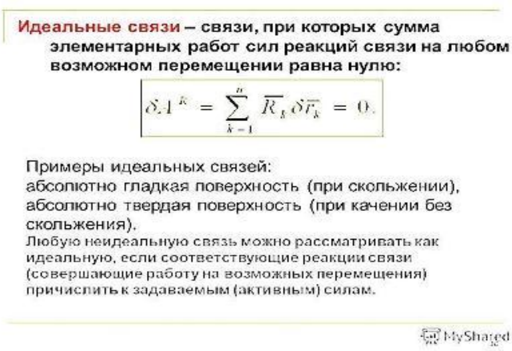
1 2

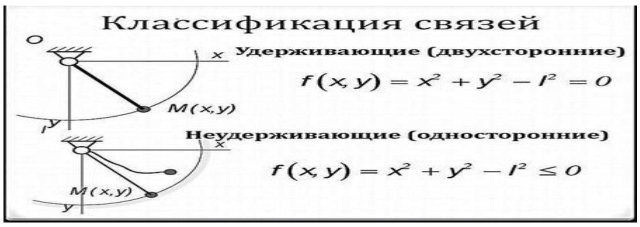
4 . 24 24

. 4 . $\delta\bar{r}_1, \delta\bar{r}_2, \ldots, \delta\bar{r}_n$ 4.

1 $\delta x_\nu, \delta y_\nu, \delta z_\nu \; (\nu = 1,2,\ldots,n$,

2





.) 4 4

©))

( )) ,

1 . . 2 1

4. -

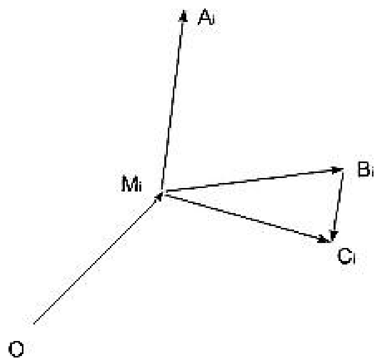
7 N

4 1 . 1 . 4

1 1 4 1

4 4

4 . 4 7



$$Z = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(w_i - \frac{F_i}{m_i}\right)^2,$$

4 1 1 4 Z 4

1 1 4 (

4.

,7

7

Пусть механическая система состоит из n свободных (на которые не наложены связи) материальных точек, массы покоя которых m_ν ($\nu = 1, \ldots, n$). Пусть на каждую точку системы действуют внешние силы, результирующая которых $\mathbf{F}_\nu^{(e)}$, и внутренние силы, результирующая которых $\mathbf{F}_\nu^{(i)}$ ($\nu = 1, \ldots, n$).

Уравнения движения этих точек могут быть записаны в виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{m_\nu \mathbf{v}_\nu}{\sqrt{1-\frac{v_\nu^2}{c^2}}} = \mathbf{F}_\nu^{(e)} + \mathbf{F}_\nu^{(i)},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{m_\nu c^2}{\sqrt{1-\frac{v_\nu^2}{c^2}}} = \mathbf{F}_\nu^{(e)}\cdot\mathbf{v}_\nu + \mathbf{F}_\nu^{(i)}\cdot\mathbf{v}_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Вторая группа этих уравнений может быть представлена в виде:

$$\frac{dT_{r\nu}}{dt} = \mathbf{F}_\nu^{(e)}\cdot\mathbf{v}_\nu + \mathbf{F}_\nu^{(i)}\cdot\mathbf{v}_\nu,$$

где $T_{r\nu}$ — полная энергия точки в специальной теории относительности.

3 **0**

. - - 1

4 . 1 1

7

. 4 1

.

$$m_i\ddot{r}_i = F_i + \sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha\nabla_i f_\alpha(r_1,\ldots,r_n,t);$$

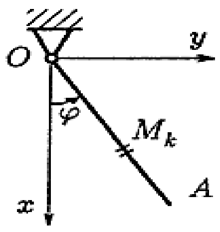


Рис. 78

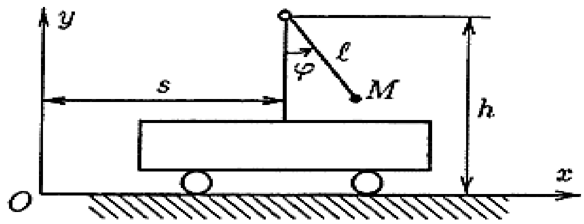


Рис. 79

чечной массы M также легко вычисляются:

$$x_M = s + \ell \sin\varphi; \quad y_M = h - \ell\cos\varphi.$$

Величины φ (пример 1), φ и s (пример 2) являются обобщенными координатами указанных систем. Это понятие можно распространить на случай произвольной механической системы.

Таким образом, *обобщенными координатами механической системы называются любые независимые между собой геометрические величины, однозначно определяющие положение системы в пространстве.* Число обобщенных координат равно числу степеней свободы системы n.

Независимо от геометрического смысла и, соответственно, размерности, обобщенные координаты обозначают единообразным способом, буквой q с номером: q_1, $q_2, \ldots,$ q_n. Из того факта, что обобщенные координаты однозначно определяют положение механической системы в выбранной системе координат $Oxyz$, следует, что существуют функции

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t); \\ y_k &= y_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t); \quad (k = 1,\, 2, \ldots,\, N) \\ z_k &= z_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t), \end{aligned}$$

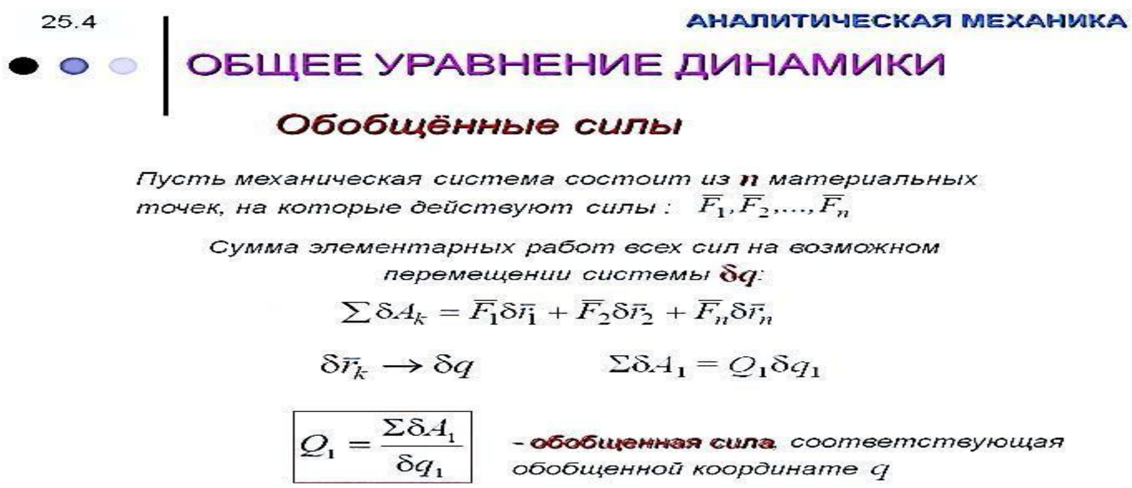
выражающие декартовы координаты всех точек системы через обобщенные координаты и, быть может, время t. Конкретный вид этих функций устанавливается свой для каждой системы (см. примеры 1 и 2).

Если ввести радиусы-векторы точек $\vec{r}_k = (x_k, y_k, z_k)$ $(k = 1,\, 2,\, \ldots,\, N)$, указанные функции можно представить в векторной форме

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \quad (k = 1,\, 2, \ldots,\, N).$$

Введем теперь понятие *обобщенной силы.* Зафиксируем систему в произвольный момент времени t и сообщим ей из этого положения возможное перемещение. Пусть в результате обобщенные координата-

' ( )) ' , - - .			
1 . . 2 1 ' . . . - 4. - ')) '			
	9 9	: .	=



0

1 .

$$L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

(_ 4 4 - - . , . 4

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

494 (. 1 , . . : . 14 . 1 1 . .

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^n$$

2 8 4 0

8 5 0 1 . . 1 4 4 (, 4 1 . 4 . 1 : 1 1 : 1 (, .

. . . 1 . . . . . 1 1 4

( ) +) , - - .			
0 1 . 0 . 2 1 . . . 3 - 4. -) +)			
+		3 : .	3 =

$$\sum_{i=1}^{N}(\overrightarrow{F_i} - m_i\overrightarrow{w_i})\delta\overrightarrow{r_i} = 0$$

) 4 4 x 4 E $\vec{F}_i$ 4. E $\vec{N}_i$ 4 4 4 (, . E

2

0 Y : . . - 0 0 0 1 4 0 : 1 . 14 0 0 4 0

Если даны два вектор-столбца $X = (x_1, \dots, x_n)'$ и $Y = (y_1, \dots, y_m)'$ случайных величин с конечными вторыми моментами, можно определить взаимную корреляцию $\Sigma_{XY} = \operatorname{cov}(X, Y)$ как $n \times m$ матрицу, элементы (i, j) которой являются ковариациями $\operatorname{cov}(x_i, y_j)$. На практике мы оцениваем ковариационную матрицу, основываясь на выборочных данных из X и Y (т.е. из пары матриц данных).

Канонический корреляционный анализ ищет вектора a ($a \in \mathbb{R}^n$) и b ($b \in \mathbb{R}^m$), такие что случайные величины $a'^T X$ и $b'^T Y$ максимизируют корреляцию $\rho = \operatorname{corr}(a'^T X, b'^T Y)$. Случайные величины $U = a'^T X$ и $V = b'^T Y$ являются ***первой парой канонических переменных***. Затем ищутся вектора, максимизирующие ту же корреляцию с ограничением, что они не коррелируют с первой парой канонических переменных, это даёт ***вторую пару канонических переменных***. Эта процедура может продолжаться до $\min\{m, n\}$ раз.

$$(a', b') = \underset{a,b}{\operatorname{argmax}} \operatorname{corr}(a^T X, b^T Y)$$

2

1 4 E . 4 . H E 4 . E . 4 E

$$H(q,\ p,\ t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q,\ \dot{q},\ t)$$

. 4 . E E 4 4 . 4 . : H k

2

) . - - 0 . . 4 4 4 1 4 4 - - 0 .

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j, \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

( ) +) ,

0 1 . 0 . 2 1

. . . 3 - 4. -

) +)

+		3 .	3 =

-- 0 1 . . (n 4 4 4 , 4

. (, 4 1 (

- 1 4 L 4

1 , 4 (_4 4 ,4 4_

(, 4 .

22 0

-- 0 1 . 4

. 1 . 1 - . . - .

. 1

$$g^t: R^{2n} \to R^{2n}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(t, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0), \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}(t, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0), \quad t \in R^1.$$

(4_ , .

3 . 1 (4_4 ,

- .

При $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ и $\dot{p}_k$, $\dot{q}_k$, удовлетворяющих каноническим уравнениям , имеем:

$$\frac{dH}{dt} = 0$$

или

$$H(q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s) = \text{const}$$

есть первый интеграл канонических уравнений. Если система консервативна, то, как показано раньше, функция H равна полной механической энергии системы ($H = T + \Pi$) и последний интеграл представляет собой интеграл энергии.

2 0 0 4

3 0 .) 4 0 . 0 . 4

)

1 4 1 0 4

\+ 0 4) 4

. . 0 1

$$S = \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt$$

0 .

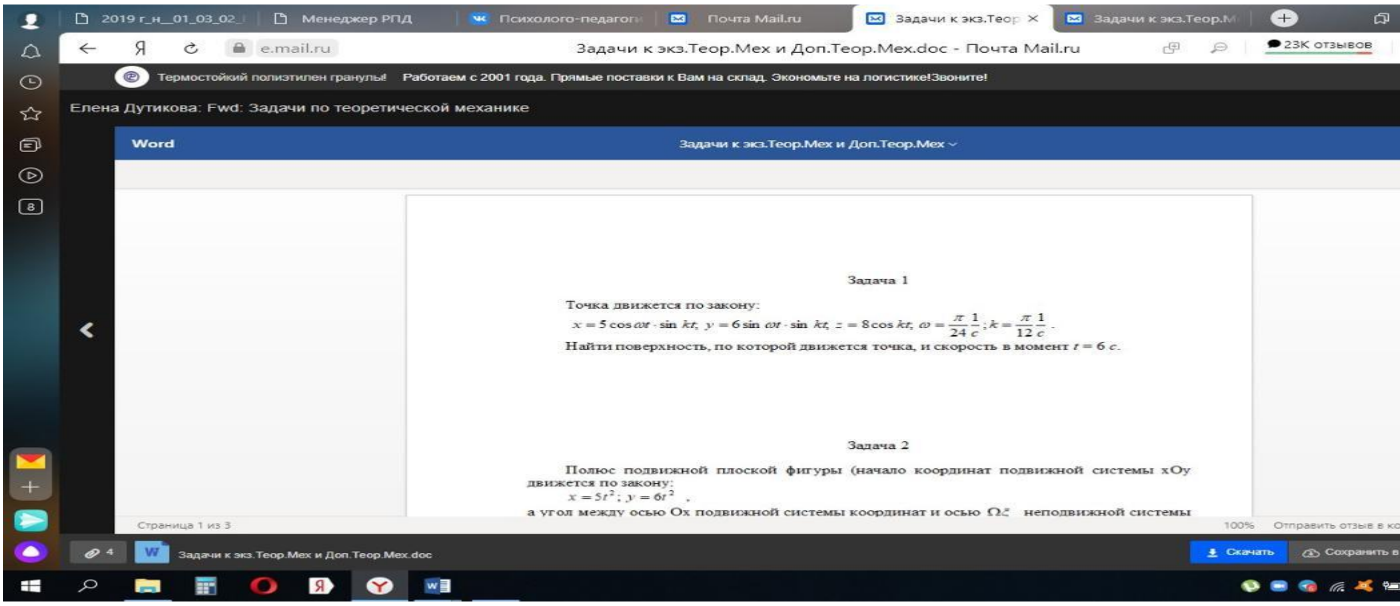
4 1 .

2 4 .

0 4p j - 0 L

( )) , - - .			
1 . . 2 1 . . . 3 - 4. -))			
		3 .	3

2 2



Задача 1

Точка движется по закону:

$x = 5\cos\omega t \cdot \sin kt,\ y = 6\sin\omega t \cdot \sin kt,\ z = 8\cos kt,\ \omega = \frac{\pi}{24}\frac{1}{c};\ k = \frac{\pi}{12}\frac{1}{c}$.

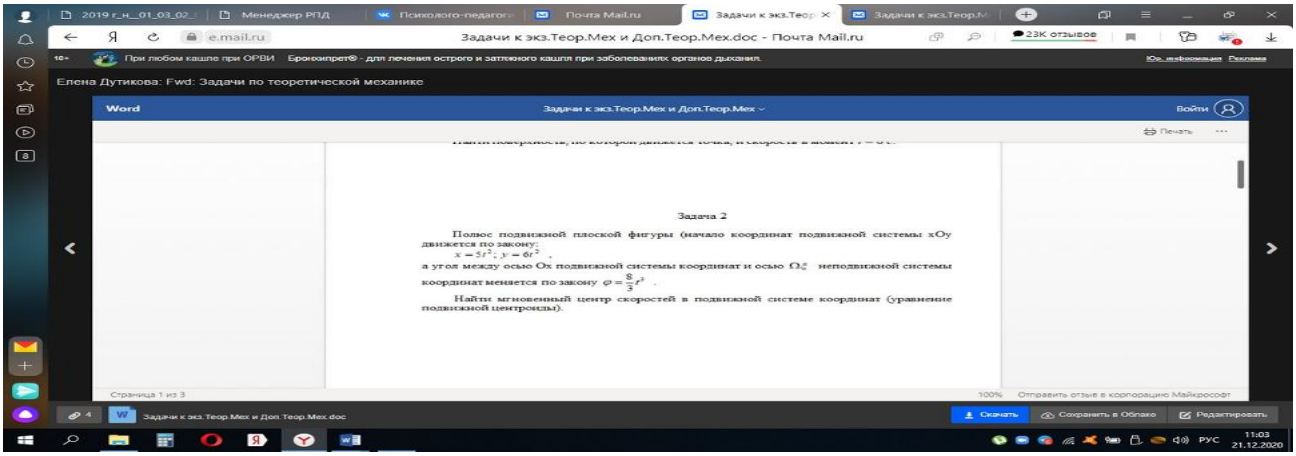
Найти поверхность, по которой движется точка, и скорость в момент $t = 6$ c.

Задача 2

Полюс подвижной плоской фигуры (начало координат подвижной системы xOy движется по закону:

$x = 5t^2;\ y = 6t^2$,

а угол между осью Ox подвижной системы координат и осью $\Omega\xi$ неподвижной системы



Задача 2

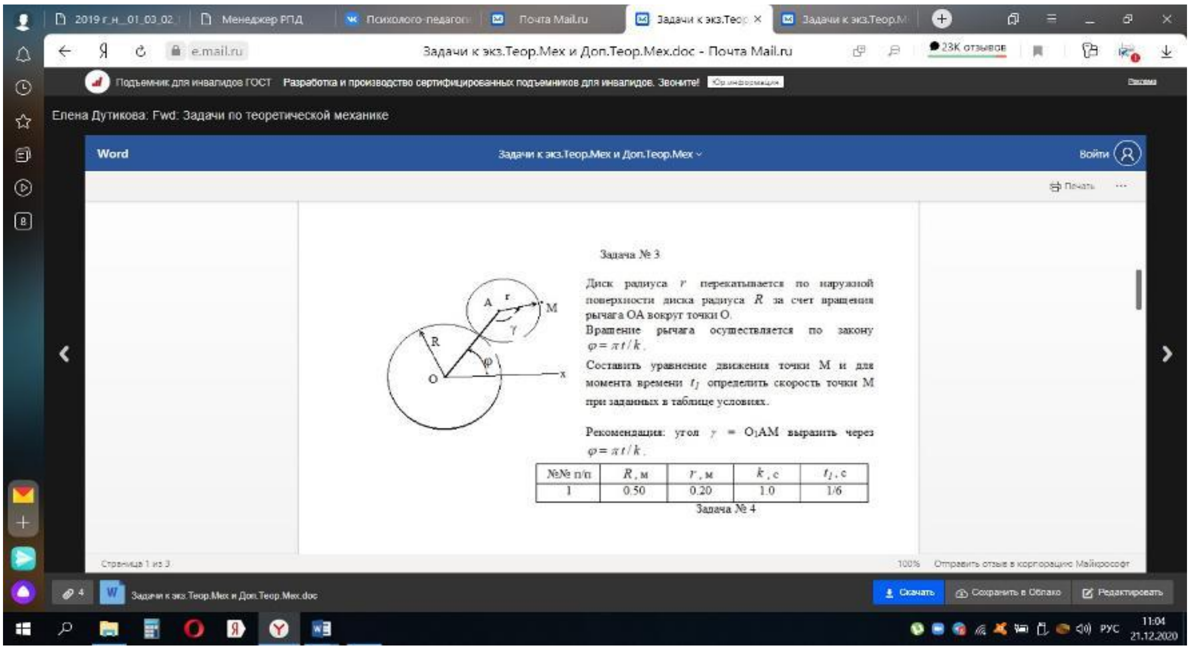
Полюс подвижной плоской фигуры (начало координат подвижной системы xOy движется по закону:

$x = 5t^2;\ y = 6t^2$,

а угол между осью Ox подвижной системы координат и осью $\Omega\xi$ неподвижной системы координат меняется по закону $\varphi = \frac{8}{3}t^3$.

Найти мгновенный центр скоростей в подвижной системе координат (уравнение подвижной центроиды).

( )) , - - .			
1 . . 2 1 . . . 3 - 4. -))			
		3 .	3



Задача № 3

Диск радиуса r перекатывается по наружной поверхности диска радиуса R за счет вращения рычага ОА вокруг точки О.

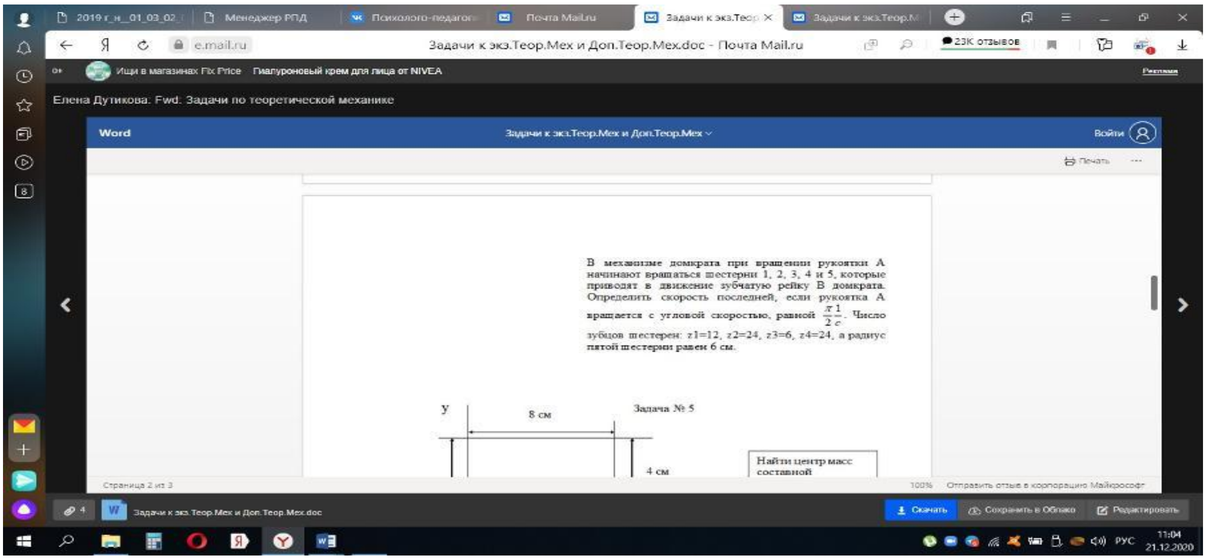
Вращение рычага осуществляется по закону $\varphi = \pi t / k$.

Составить уравнение движения точки М и для момента времени t_1 определить скорость точки М при заданных в таблице условиях.

Рекомендация: угол γ = O_1AM выразить через $\varphi = \pi t / k$.

№№ п/п	R, м	r, м	k, с	t_1, с
1	0.50	0.20	1.0	1/6

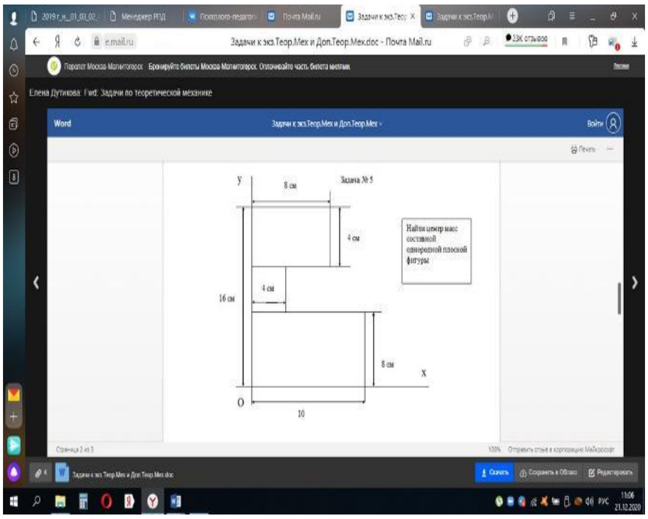
Задача № 4

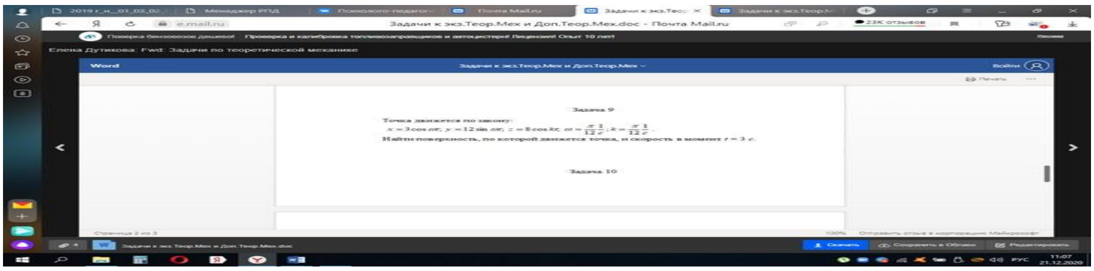


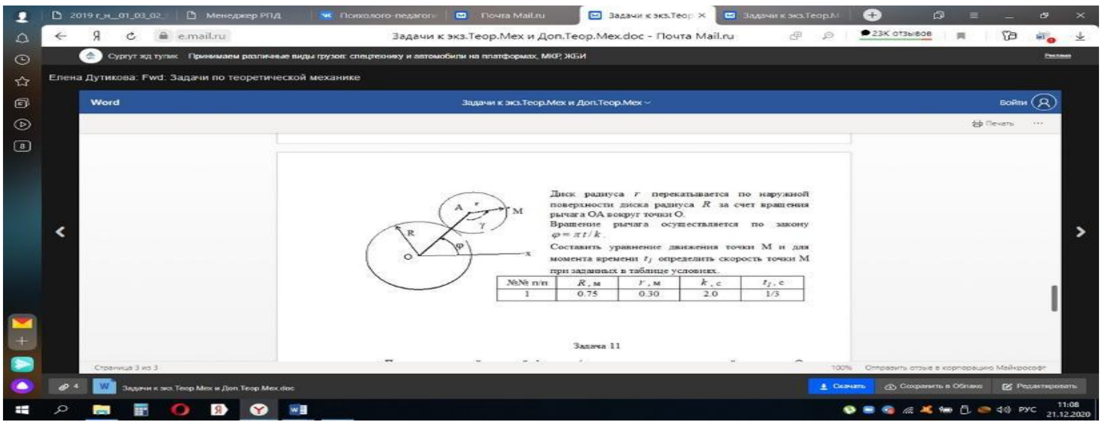
В механизме домкрата при вращении рукоятки А начинают вращаться шестерни 1, 2, 3, 4 и 5, которые приводят в движение зубчатую рейку В домкрата. Определить скорость последней, если рукоятка А вращается с угловой скоростью, равной $\frac{\pi}{2}\frac{1}{c}$. Число зубцов шестерен: z1=12, z2=24, z3=6, z4=24, а радиус пятой шестерни равен 6 см.

Задача № 5

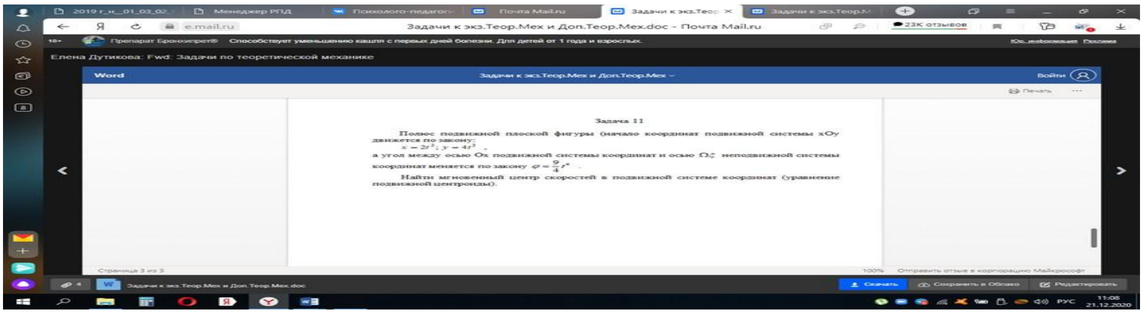
( )) , - - .			
1 . . 2 1 . . . 3 - 4. -))			
6	7 8 8	3 .	3







( )) , - - . / /			
1 . . 2 / 1 . . . 3 / / - / 4. - / /))			
/ 56	7	3 / .	3



Задача 11

Полюс подвижной плоской фигуры (начало координат подвижной системы xOy движется по закону:
$x = 2t^3;\ y = 4t^3$,
а угол между осью Ox подвижной системы координат и осью $\Omega\xi$ неподвижной системы координат меняется по закону $\varphi = \frac{9}{4}t^4$.
Найти мгновенный центр скоростей в подвижной системе координат (уравнение подвижной центроиды).

2

. .	/		5 5 / / .
6	. / . / 1 1 / 17	/ 7. 7 76	3 56
	. 4 5 4 / 5 1 / 1 7	/ 7. 7 76	3 56
	. 4 5 . / 7	/ 7. 7 76	3 56
	. / 7	/ 7. 7 76	3 56
	/ 4 5 7	/ 7. 7 76	3 56
	. / / 1 7	/ 7. 7 76	3 56
	. / 1 / 5 / . / 5 4 / / 1	/ 7. 7 76	3 56

2

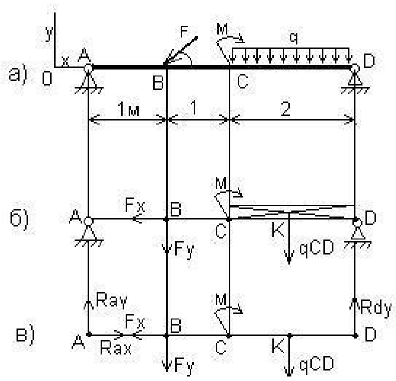
4

. . 7

( )) ,
-
- .

1 . . 2 1
. . . 3 - 4. -
))

56		3 : . ;;;;;;;;;;	3 ;;;;;



6
, .
$F_x = F\cos\alpha$ $F_y = F\sin\alpha$ *01* 5
. 4. . . 4. .
214 *3*
. 4 1 .
. .
, 1 1 4 5
. 4 . 1 1

$$\sum M_A = F_y \cdot AB + M + qCD \cdot AK - R_D \cdot AD = 0$$

$$R_{Dy} = \frac{F_y \cdot AB + M + qCD \cdot AK}{AD} = \frac{10 \cdot 1 + 10 + 2 \cdot 3}{4} = 6{,}5$$

, .

$$\sum M_D = R_{Ay} \cdot AD - F_y \cdot BD + M - qCD \cdot KD = 0$$

$$R_{Ay} = \frac{F_y \cdot BD - M + qCD \cdot KD}{AD} = \frac{F\sin\alpha \cdot BD - M + qCD \cdot KD}{AD} = \frac{20 \cdot 0.5 \cdot 3 - 10 + 2}{4} = 5.5$$

, .

$$\sum X = R_{Ax} - F_x = 0 \quad R_{Ax} = F_x = F\cos\alpha = 20 \cdot 0.86 = 17.3$$

3 . 1

$$\sum Y = R_{Ay} - F_y - qCD + R_{Dy} = 5.5 - 10 - 2 + 6.5 = 0$$

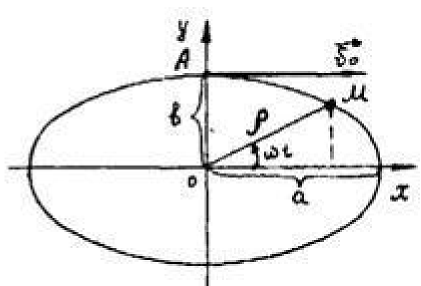
$\sum Y_i = 0$. 4 4 .

" " **4**

2 M . : . 4 5 ρ4 5
M : . 4. ω . :
M . ρ φ4 .

$x = \rho\cos\omega t, \quad y = \rho\sin\omega t, \quad \omega t = \varphi$

3 : : . 4.



/ 56	7 9	3 : / . ;;;;;;;;;;	3 = ;;;;;

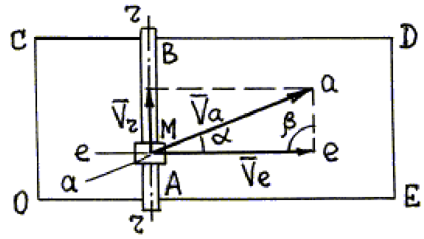
$$\frac{\rho^2 \cos^2 \omega t}{a^2} + \frac{\rho^2 \sin^2 \omega t}{b^2} = 1$$

$$\rho = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \omega t + a^2 \sin^2 \omega t}} \quad 7$$

$$V_r = \frac{d\rho}{dt} = \frac{ab\omega (b^2 - a^2) \sin 2\omega t}{2(a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{1,5}} \quad 4$$

$$V_\varphi = \rho \dot{\varphi} = \rho \omega = \frac{\omega \cdot a \cdot b}{(a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{0,5}} \quad 4$$

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\varphi^2} \quad 7$$



6

0 1 *5 0 1*

α 4 α 7

$\overline{V}_r$ 4

$\overline{V}_e$ 7

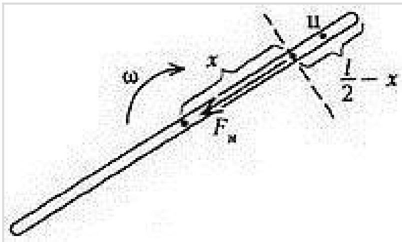
73 V_r 4 V_e 4 β 7

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}1^2} = 0{,}224$$

( )) , - - .			
1 . . 2 1 . . . 3 - 4. -))			
	8	3 .	3

$$tg\alpha = \frac{V_r}{V_e} = \frac{0,2}{0,1} = 2$$

2



3 2 . . 1 4 . . 4

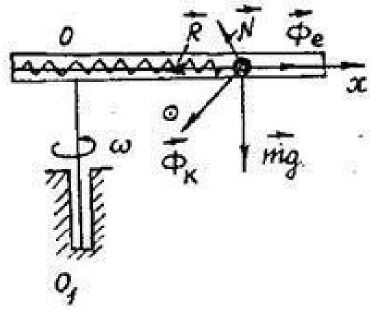
3 4 4 (. ,

F 4

$\Delta m = m \cdot \frac{\frac{l}{2} - x}{l}$ 4 . $x + \frac{\frac{l}{2} - x}{2} = \frac{l + 2x}{4}$

$a_u = \omega^2 \cdot \frac{l + 2x}{4}$. 4.

$$F_u = \Delta m \cdot a_u = m \cdot \omega^2 \cdot \frac{l^2 - 4x^2}{8l}.$$



m 4. . . 4 - - C 4 1 . x_0 OO_1 . 4 OO_1 . ω 2 O . .

6 3 x O . 4 x 4. . . $\overline{R}$ 4 $\overline{P}$ 4. $\overline{\Phi}_e$ 4 $\overline{\Phi}_k$ $\overline{N}$ 4 . . 4. . - -

$$m\ddot{x} = -R + \Phi_e$$

4 $R = cx, P = mg, \Phi_e = ma_e = m\omega^2 x$ 4.

$m\ddot{x} = -cx + m\omega^2 x$ 4 $\ddot{x} + (\omega_0^2 - \omega^2)x = 0,$ $\omega_0 = \sqrt{c / m}$

( )) , - - . / /			
0 1 . 0 . 2 / 1 . . . 3 / / - / 4. - / /))			
/ 5	M 9	3 : / .	3 =

/ / 4 $\omega_0 > \omega$ 2 - - 0 /

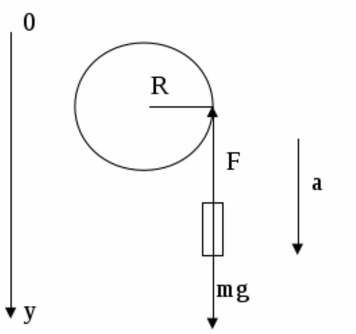
$x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt$ 4 $k = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}$

. c_1 c_2 4 /

$V_r = \dot{x} = -c_1 k \sin kt + c_2 k \cos kt$

3 $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = 0$ 4. / $c_1 = x_0$, $c_2 = 0$

4 . $x = x_0 \cos kt$



/ a 4? / / 4 0 . / a / / 0 4 4 5 $\varepsilon = 2\,\frac{рад}{c^2}$ 2 / .

6

a 4 a 4? / 4

a

. 1 . /

$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}$

1 a

a (5 ,

ε a J a J a J a

a (,

a / / / / 0

a a / /

3 1 / /

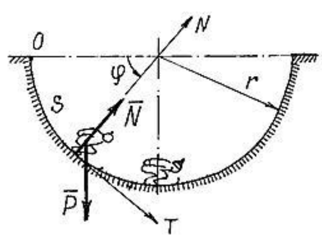
a

a ((, ,J a 994? (/ ,

994? / 9

3

"



. . 0 . 1 5 . / 4. . /

6 1 / 4 . / . ; / / 2 . 4 4 . . / 4. (. 0 ; 1 5 ,

- - 0 . /

$$\frac{P}{g}\ddot{s} = P\cos\varphi; \quad \frac{P}{g}\frac{v^2}{r} = N - P\sin\varphi. \qquad (6)$$

( )) ,

-

- .

0 1 . 0 . 2 1

. . . - 4. -

))

		: . ;;;;;;;;;;	= ;;;;;

. $\ddot{s} = g\cos\varphi$ 2 $s = r\varphi$ 4 . .

$\ddot{\varphi} - \frac{g}{r}\cos\varphi = 0$ 2 .

. $\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{d\varphi} = \dot{\varphi}\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\varphi}^2}{d\varphi}$ 2 - - 0 .

$d\dot{\varphi}^2 = 2\frac{g}{r}\cos\varphi\cdot d\varphi$ $\dot{\varphi}^2 = 2\frac{g}{r}\sin\varphi + C_1$.

2 . ;; $\varphi = 0$ $\dot{\varphi} = \omega_0 = 0$ 4 0 $\dot{\varphi} = \sqrt{2\frac{g}{r}\sin\varphi}$ 4 $\dot{s} = r\dot{\varphi} = \sqrt{2gr\sin\varphi}$

.

. - 0 φ 2 . 4. $\varphi = \frac{\pi}{2}, v = \dot{s} = \sqrt{2gr}$

. $\varphi = \frac{\pi}{2}$. $N = P + \frac{P}{g}\frac{v^2}{r} = P + \frac{P}{g}\frac{2gr}{r} = 3P$ 2

. 1

2 **4**

0 . 0	. 0 .	0			
	. 1 . . 4 4 1	4 . . . . . . -	. 4 . . . 4 4 . . 1 4 . 0	. . 4 . 1 . 4 . . . 1 4 . 0	4 4 . 4 . . . 4 1 .
	1 . 1 - . 4 . . .	4 . .	. - 4 . . 4 . - 4 . 1 .	- 4 . 1 . . 4 . - 4 . 1 . 4 . .	. . 1 . . . .

©)   )

( )) , - - .			
1 . . 2 1 . . . - 4. -))			
		: . ; ; ; ; ; ; ; ; ; ;	; ; ; ; ;

	4 4 1				
	. . - 1 . . 4 . . . 4 4 1	4 1 1 . 1 : . 1	4 . : . 1	4 1 . : . 1 1	4 1 . : . 1 1

2 3 **4**

	1
. -	

- 0

. . - .

1 4 1 . 1

. . .

4 .

1 . -

-

. . - .

- . . 1

. 1

©))

( )) , - - .			
1 . . 2 1 . . . - 4. -))			
		: . ;;;;;;;;;;	;;;;;

4 . 1

-

. . - . 4

. - -

4 . . 1 .

1

. . 1 .

1 4

1 4 . . . 1

. 4 4 1