Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации

по дисциплине

Уравнения математической физики

Направление подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)
Математическое моделирование

Присваиваемая квалификация
бакалавр

Форма обучения
очная

Миасс 2026 г.

01.03.02 Прикладная математика и информатика, Математическое моделирование, Уравнения математической физики, 2026, очная

Фонд оценочных средств одобрен и рекомендован:

Проректор по учебной работе	утверждено 27.02.26	А.А. Саламатов

Ученым советом Миасского филиала ФГБОУ ВО "ЧелГУ"

Протокол заседания № 8 от 24.02.2026

Председатель Ученого совета Миасского филиала ФГБОУ ВО "ЧелГУ"	согласовано	Т.В. Малькова

Заседанием кафедры прикладной математики

Протокол заседания № 6 от 30.01.2026

Заведующий кафедрой	согласовано	Е.В. Дутикова
Автор (составитель)		Е.А. Рождественская

Структура фонда оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине соответствует приказу ректора ФГБОУ ВО «ЧелГУ» от 27.09.2022 г. № 573-1 «Об утверждении шаблонов документов».

Содержание

1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Направление подготовки: *01.03.02 «Прикладная математика и информатика»*
Направленность (профиль): *Математическое моделирование*
Дисциплина: *Уравнения математической физики*
Семестры изучения: *5, 6*
Форма промежуточной аттестации: *5 семестр – зачет, 6 семестр – экзамен*

2. ПЕРЕЧЕНЬ ФОРМИРУЕМЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ

2.1. Компетенции, закреплённые за дисциплиной

Изучение дисциплины «Уравнения математической физики» направлено на формирование следующих компетенций:

Коды компетенции (по ФГОС)	Содержание компетенций согласно ФГОС	Индикаторы достижения	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине
1	2	3	4
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук ОПК-1.2.Демонстрирует умение решать задачи, формулируемые в рамках математических и (или) естественных наук ОПК-1.3. Имеет навыки использования основных понятий, теорем, законов математики и (или) естественных наук для решения задач профессиональной деятельности	*Знать* предмет и метод уравнений математической физики, классификацию дифференциальных уравнений в частных производных математической физики, вывод уравнения колебаний струны, уравнения теплопроводности, уравнения Лапласа и Пуассона. *Уметь* ставить дифференциальные задачи для уравнений математической физики: первую, вторую, третью краевые задачи и задачу Коши. *Владеть* методами решения дифференциальных задач для уравнений математической физики: метод характеристик, метод Фурье, метод Даламбера, метод функций Грина.
ОПК-3	Способен применять и модифицировать математические модели для решения	ОПК-3.1. Имеет представление об известных математических моделях, применяемых для решения задач в области профессиональной деятельности ОПК-3.2. Демонстрирует умения при-	*Знать* физические процессы, которые описываются уравнениями математической физики: теплопроводности и диффузии, колебательные процессы, установившиеся процессы. *Уметь* строить математические модели процессов теплопроводности и диффузии, колебательных процессов,

	задач в области профессиональной деятельности	менять и модифицировать математические модели для решения прикладных задач ОПК-3.3. Имеет практический опыт применения и выполнения модификаций математических моделей для решения прикладных задач	установившихся процессов с помощью уравнений в частных производных. *Владеть* способностью находить решения математических моделей, построенных на уравнениях математической физики и интерпретировать их физический смысл.

3. СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

3.1 Виды оценочных средств

№ п/п	Контролируемые темы/ разделы	Код компетенции/ планируемые результаты обучения	Наименование оценочного средства для текущего контроля	Наименование оценочного средства на промежуточной аттестации
1	Уравнения гиперболического типа	ОПК-1 *знать* классификацию дифференциальных уравнений гиперболического типа, постановку краевых задач, собственные числа, собственные функции и их свойства; *уметь* выводить дифференциальные уравнения колебаний струн, стержней, мембран, пружин, приводить уравнения к каноническому виду; *владеть* методами решения задачи Коши и краевых задач Даламбера и Фурье.	Контрольные работы №1-№4, Тесты 1-3	Вопросы к зачету, экзамену. Типовые задачи
2	Уравнения параболического типа	ОПК-1 *знать* классификацию дифференциальных уравнений параболического типа, постановку краевых задач, собственные числа, собственные функции и их свойства; *уметь* выводить дифференциальные уравнения теплопроводности и диффузии, приводить уравнения к каноническому виду; *владеть* методами решения задачи Коши и краевых задач Даламбера и Фурье..	Контрольная работа №5, Тест 4	Вопросы к зачету, экзамену. Типовые задачи
3	Уравнения эллиптического типа	ОПК-3 *знать* уравнения Лапласа и Пуассона, теорию потенциала, специальные функции, постановку краевых задач Дирихле и Неймана; *уметь* решать уравнения эллиптического типа методами Фурье и Грина; *владеть* методами составления интегральных уравнений, соответствующих краевым задачам.	Контрольные работы №6-№7, Тест 5	Вопросы к зачету, экзамену. Типовые задачи

Типовые задания, контрольные работы, тесты критерии и показатели оценивания в рамках текущего контроля представлены в рабочей программе по дисциплине. Полные комплекты оценочных средств и контрольно-измерительных материалов хранятся на кафедре и являются учебно-методическими материалами ограниченного (конфиденциального) пользования.

3.2 Порядок проведения промежуточной аттестации в 5 семестре и содержание оценочных средств

Тестовые задания по дисциплине «Уравнения математической физики»

Часть 1. Открытые вопросы (10 заданий)

№	Вопрос
1	Опишите классификацию линейных дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных. Как определяется тип уравнения с помощью дискриминанта и какова цель приведения его к каноническому виду?
2	Выведите уравнение малых поперечных колебаний однородной струны. Какие физические законы и математические допущения используются при построении модели?
3	Раскройте суть метода характеристик для уравнений гиперболического типа. Какова геометрическая и физическая интерпретация характеристик в плоскости (x,t)?
4	Запишите формулу Даламбера для решения задачи Коши одномерного волнового уравнения. Объясните физический смысл каждого слагаемого и принцип распространения волн отклонения и импульса.
5	Опишите метод разделения переменных (метод Фурье) для решения смешанных краевых задач. Как в процессе решения возникают задачи Штурма-Лиувилля и какова роль ортогональности собственных функций?
6	Выведите уравнение теплопроводности для однородного изотропного стержня. Раскройте физический смысл коэффициентов теплопроводности и температуропроводности.
7	Сформулируйте принцип максимума для уравнения теплопроводности. Как этот принцип применяется для доказательства единственности и устойчивости решения краевой задачи?
8	Раскройте понятие гармонической функции. Перечислите её основные свойства (принцип максимума, свойство среднего значения) и объясните их физический смысл в контексте стационарных процессов.
9	Сравните первую (Дирихле) и вторую (Неймана) краевые задачи для уравнения Лапласа. При каких дополнительных условиях гарантируется существование и единственность решения в каждом случае?
10	Объясните концепцию функции Грина для краевых задач эллиптического типа. В чём заключается её отличие от фундаментального решения и как она используется для построения интегрального представления решения?

Часть 2. Закрытые вопросы (10 заданий)

№	Вопрос и варианты ответов
11	Знак дискриминанта B^2-AC квадратичной формы уравнения $Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}+\quad=0$ определяет его тип. Если $B^2-AC>0$, уравнение является: а) эллиптическим; б) параболическим; в) гиперболическим; г) вырожденным
12	Какая формула даёт классическое решение задачи Коши для одномерного волнового уравнения $u_{tt}=a^2u_{xx}$? а) Формула Пуассона; б) Формула Даламбера; в) Формула Остроградского; г) Формула Кирхгофа
13	Уравнение теплопроводности $u_t=k\Delta u$ относится к типу: а) гиперболический; б) эллиптический; в) параболический; г) смешанный

14	Собственные функции задачи Штурма-Лиувилля $-y''=\lambda y$ с граничными условиями $y(0)=y(l)=0$ имеют вид: а) $e^{n\pi x/l}$; б) $\sin(n\pi x/l)$; в) $\cos(n\pi x/l)$; г) $J_n(x)$
15	Какое условие задаётся в краевой задаче Дирихле для уравнения Лапласа? а) Значение искомой функции на границе области; б) Значение нормальной производной на границе; в) Линейная комбинация функции и её производной; г) Начальное распределение температуры
16	Принцип максимума для гармонических функций утверждает, что: а) Максимум всегда достигается внутри области; б) Максимум и минимум достигаются только на границе области; в) Функция всегда постоянна; г) Максимум зависит только от времени
17	Фундаментальное решение одномерного уравнения теплопроводности представляет собой: а) Ступенчатую функцию Хевисайда; б) Гауссову кривую, зависящую от времени; в) Дельта-функцию Дирака; г) Линейную функцию координаты
18	Метод разделения переменных применим, если: а) Область и коэффициенты позволяют представить решение в виде произведения функций, каждая из которых зависит только от одной переменной; б) Уравнение нелинейное; в) Граничные условия неоднородные; г) Уравнение содержит производные только по времени
19	Уравнение Пуассона $\Delta u=f(x,y)$ отличается от уравнения Лапласа $\Delta u=0$ тем, что: а) Содержит ненулевую правую часть; б) Содержит производную по времени; в) Является нелинейным; г) Имеет комплексные коэффициенты
20	Функция Грина $G(x,\xi)$ для краевой задачи позволяет записать решение неоднородного уравнения в виде: а) $u(x)=\int G(x,\xi)f(\xi)d\xi$; б) $u(x)=G(x,\xi)f(x)$; в) $u(x)=\nabla\cdot G$; г) $u(x)=\partial G/\partial t$

Часть 3. Задания на соответствие (5 заданий)

№	Задание
21	Установите соответствие между типом уравнения математической физики и его типичным физическим процессом: 1) Гиперболическое; 2) Параболическое; 3) Эллиптическое а) Стационарное распределение потенциала/температуры; б) Волновые и колебательные процессы; в) Нестационарные процессы диффузии и теплопереноса
22	Установите соответствие между методом решения и его основным назначением: 1) Метод Даламбера; 2) Метод Фурье; 3) Метод характеристик; 4) Метод функций Грина а) Приведение уравнения к каноническому виду; б) Решение задачи Коши на бесконечной прямой; в) Решение краевых задач в ограниченных областях через ряды по собственным функциям; г) Интегральное представление решения неоднородных уравнений
23	Установите соответствие между краевой задачей и видом граничного условия: 1) Задача Дирихле; 2) Задача Неймана; 3) Задача Робена (3-го рода) а) $u
24	Установите соответствие между физическим законом и соответствующим дифференциальным уравнением: 1) 2-й закон Ньютона + закон Гука; 2) Закон сохранения энергии + закон Фурье; 3) Стационарное поле без источников а) Уравнение колебаний; б) Уравнение теплопроводности; в) Уравнение Лапласа

25	Установите соответствие между термином и его определением в контексте УМФ: 1) Собственное число; 2) Собственная функция; 3) Характеристика; 4) Фундаментальное решение а) Кривая, вдоль которой происходит распространение возмущений; б) Решение с точечным источником (δ-функция); в) Параметр λ, при котором задача имеет ненулевое решение; г) Ненулевое решение однородной краевой задачи

КЛЮЧИ К ТЕСТУ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

№ задания	Верный ответ	Критерии оценивания
1	Классификация по знаку $\Delta = B^2 - AC$: $\Delta > 0$ – гиперболическое, $\Delta = 0$ – параболическое, $\Delta < 0$ – эллиптическое. Канонический вид устраняет смешанные производные, упрощая анализ и выбор метода решения.	**1 балл**: верная формула дискриминанта + 3 типа + цель канонизации. **0,5 балла**: только типы или только цель. **0 баллов**: неверная классификация.
2	Вывод из 2-го закона Ньютона для элемента dx, сила натяжения T, малые углы ≈ продольные колебания пренебрегаются. Итог: $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.	**1 балл**: закон Ньютона + модель элемента + допущения + итог. **0,5 балла**: только физические законы без допущений. **0 баллов**: неверный вывод.
3	Замена переменных вдоль кривых $dy/dx = \lambda_{1,2}$. Геометрически – линии, вдоль которых разрывы производных или начальные возмущения переносятся без искажения формы.	**1 балл**: суть замены + уравнение характеристик + физическая интерпретация. **0,5 балла**: только математическая суть. **0 баллов**: путаница с границами.
4	$u = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z)\, dz$. Первое слагаемое – волны отклонения, второе – волны импульса. Область зависимости – треугольник.	**1 балл**: точная формула + объяснение слагаемых + область зависимости. **0,5 балла**: формула без физического смысла. **0 баллов**: неверная формула.
5	Подстановка $u = X(x)T(t)$, разделение $\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$. Возникает задача Штурма-Лиувилля. Ортогональность позволяет разложить начальные условия в ряд Фурье.	**1 балл**: подстановка + разделение + связь со Ш-Л + роль ортогональности. **0,5 балла**: только разделение без Ш-Л. **0 баллов**: неверная методика.
6	Из закона сохранения энергии и закона Фурье $\vec{q} = -k \nabla u$. Получается $u_t = \alpha \Delta u + f \cdot$ k – теплопроводность (Вт/м·К), $\alpha = k/(c\rho)$ – температуропроводность (м²/с).	**1 балл**: базовые законы + вывод + размерность/смысл α. **0,5 балла**: только закон Фурье без вывода уравнения. **0 баллов**: неверные коэффициенты.
7	Если $u_t - k\Delta u = 0$, то $\max u$ достигается на параболической границе ($t = 0$ и боковые стенки). Гарантирует, что два решения с одинаковыми данными совпадают.	**1 балл**: формулировка + область достижения максимума + следствие для единственности. **0,5 балла**: только формулировка. **0 баллов**: неверное понимание принципа.
8	$\Delta u = 0$. Свойства: отсутствие внутренних экстремумов, среднее значение по сфере равно значению в	**1 балл**: определение + ≥2 свойства + фи-

	центре, бесконечная гладкость. Физика: отсутствие локальных источников/стоков.	зическая интерпретация. **0,5 балла**: только свойства без физики. **0 баллов**: неверные свойства.
9	Дирихле: задана. *Решение единственно. Нейман: задана*. Решение существует	**1 балл**: формулировки + условия единственности/существования для обеих задач. **0,5 балла**: только одна задача. **0 баллов**: путаница условий.
10	Физически – отклик системы на точечный импульс. регулярнаячастьрегулярнаячасть $G=F+$регулярная часть, где F – фундаментальное решение (сингулярно), а регул. часть подбирается так, чтобы G удовлетворяла граничным условиям.	**1 балл**: определение + интегральное представление + отличие от фундаментального. **0,5 балла**: только определение. **0 баллов**: неверное понимание метода.
11	в) гиперболическим	**1 балл** за правильный выбор. **0 баллов** за ошибку.
12	б) Формула Даламбера	**1 балл** за правильный выбор. **0 баллов** за ошибку.
13	в) параболический	**1 балл** за правильный выбор. **0 баллов** за ошибку.
14	б) $\sin(n\pi x/l)$	**1 балл** за правильный выбор. **0 баллов** за ошибку.
15	а) Значение искомой функции на границе области	**1 балл** за правильный выбор. **0 баллов** за ошибку.
16	б) Максимум и минимум достигаются только на границе области	**1 балл** за правильный выбор. **0 баллов** за ошибку.
17	б) Гауссову кривую, зависящую от времени	**1 балл** за правильный выбор. **0 баллов** за ошибку.
18	а) Область и коэффициенты позволяют представить решение в виде произведения функций...	**1 балл** за правильный выбор. **0 баллов** за ошибку.
19	а) Содержит ненулевую правую часть	**1 балл** за правильный выбор. **0 баллов** за ошибку.
20	а) $u(x)=\int G(x,\xi)f(\xi)d\xi$	**1 балл** за правильный выбор. **0 баллов** за ошибку.
21	1–б, 2–в, 3–а	**1 балл** за все верные пары. **0,5 балла** за 2 верные пары. **0 баллов** за ≤1 верную пару.
22	1–б, 2–в, 3–а, 4–г	**1 балл** за все верные пары. **0,5 балла** за 2–3 верные пары. **0 баллов** за ≤1 верную пару.
23	1–а, 2–б, 3–в	**1 балл** за все верные пары. **0,5 балла** за 2 верные пары. **0 баллов** за ≤1 верную пару.
24	1–а, 2–б, 3–в	**1 балл** за все верные пары. **0,5 балла** за 2 верные пары. **0 баллов** за ≤1 верную пару.

25	1–в, 2–г, 3–а, 4–б	**1 балл** за все верные пары. **0,5 балла** за 2–3 верные пары. **0 баллов** за ≤1 верную пару.

Шкала перевода баллов в оценку

Сумма баллов	Оценка	Уровень освоения компетенций
20–25	Отлично / Зачтено	Продвинутый
15–19	Хорошо / Зачтено	Базовый
10–14	Удовлетворительно / Зачтено	Пороговый
0–9	Неудовлетворительно / Не зачтено	Компетенции не сформированы

Промежуточная аттестация в 5 семестре проводится в форме зачета в два этапа.

На первом этапе студент решает две задачи и отвечает на два вопроса из выбранного случайным образом билета. Во время выполнения можно использовать справочные материалы. Время выполнения – 40 минут.

На втором этапе студент отвечает устно на вопросы из билета. Продолжительность – 10 минут.

Оценочные средства для промежуточной аттестации представлены базой вопросов к зачету и типовыми задачами, билетами к зачёту.

3.2.1. База вопросов к зачёту

№ п/п	Формулировка вопроса	Варианты ответов/ правильный ответ*	Код контролируемой компетенции
Раздел 1 Уравнения гиперболического типа			
1	Предмет математической физики.	[Л 2.5], с. 3	ОПК-1, ОПК-3
2	Основные этапы развития математической физики.	[Л 2.5], с. 3*	ОПК-1
3	Определение дифференциального уравнения с частными производными.	[[Л 2.5], с. 63	ОПК-1
4	Определение линейного, нелинейного, квазилинейного дифференциального уравнения с частными производными.	[Л 2.5], с.17, 20	ОПК-1
5	Определение однородного и неоднородного дифференциального уравнения с частными производными.	[Л 2.5], с. 63-64	ОПК-1
6	Квадратичная форма дифференциального уравнения второго порядка с частными производными.	[Л 2.5], с. 64	ОПК-1
7	Классификация дифференциальных уравнений второго порядка по дискриминанту квадратичной формы.	[Л 2.5], с. 64	ОПК-1

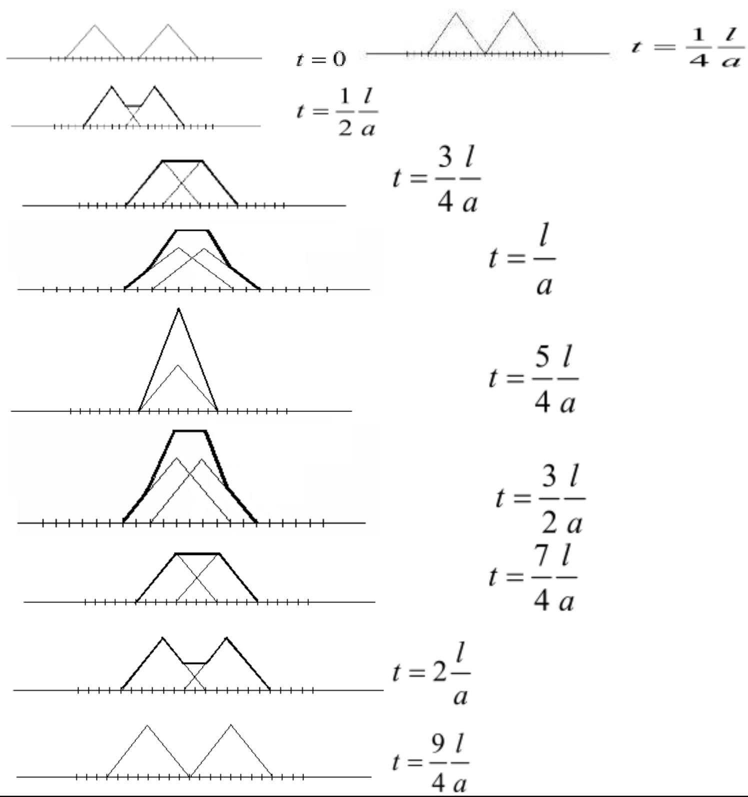
8	Канонический вид дифференциальных уравнений втрого порядка с частными производными.	[Л 2.5], с.64-88	ОПК-1
9	Характеристическое уравнение квадратичной формы. Метод характеристик.	[Л 2.5], с.64-69	ОПК-1
10	Теорема о возможности приведения дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными к каноническому виду.	[Л 2.5], с.64-69	ОПК-1
11	Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными гиперболического типа.	[Л 2.5], с.70-81	ОПК-1
12	Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными параболического типа.	[Л 2.5], с.82-85	ОПК-1
13	Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными эллиптического типа.	[Л 2.5], с.85-88	ОПК-1
14	Вывод уравнения колебаний струны.	[Л 2.5], с.89-96	ОПК-1
15	Требования к начальным и граничным условиям дифференциальной задачи.	[Л 2.5], с.94-96	ОПК-1
16	Краевые задачи для уравнения колебаний струны.	[Л 2.5], с.99-104	ОПК-1
17	Задача Коши для уравнения колебаний струны.	[Л 2.5], с.102	ОПК-1
18	Формула Даламбера.	[Л 2.5], с.105-110	ОПК-1
19	Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши для уравнения колебаний струны от начальных данных.	[Л 2.5], с.109-110	ОПК-1
20	Распространение по бесконечной струне волн отклонения.	[Л 2.5], с.111-118	ОПК-1
21	Распространение по бесконечной струне волн импульса.	[Л 2.5], с.118-122	ОПК-1
22	Метод Фурье для гиперболического уравнения.	[Л 2.5], с.134-140	ОПК-1
23	Стоячие волны закреплённой струны.	[Л 2.5], с.149-146	ОПК-1
24	Теорема единственности решения задачи о колебаниях струны.	[Л 2.5], с.77-89	ОПК-1
25	Собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля на отрезке.	[Л 2.5], с.147-151	ОПК-1
26	Какие колебания называются гармоническими?	[Л 2.5], с.140-142	ОПК-1
27	Свойства собственных чисел и собственных функций.	[Л 2.5],	ОПК-1

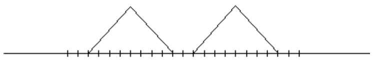
		с.152-153	
28	Свойство соответствия каждому собственному числу единственной собственной функции.	[Л 2.5], с.153-154	ОПК-1
29	Свойство соответствия каждой собственной функции единственного собственного числа.	[Л 2.5], с.154-155	ОПК-1
30	Свойство ортогональности собственных функций.	[Л 2.5], с.155-156	ОПК-1
31	Свойство вещественности собственных чисел.	[Л 2.5], с.156	ОПК-1
32	Свойство не отрицательности собственных чисел.	[Л 2.5], с.156-157	ОПК-1
33	Решение неоднородного уравнения колебаний струны.	[Л 2.5], с.158-165	ОПК-1

* Правильный ответ приведен на указанной странице в учебном пособии за номером [2.5]: Тюлькин Б.М. Лекции по уравнениям математической физики: учебное пособие. Миасс: «Геотур». 2005. - 400 с., которое в количестве 50 экз. имеется в библиотеке Миасского филиала ЧелГУ.

3.2.2 Перечень типовых задач

№ п/п	Формулировка задачи, ответ	Код контроли-руемой компе-тенции
1	Решить задачу Коши для уравнения $u_{xx} - 2u_{xy} + 4e^y = 0$ при $u\|_{x=0} = \varphi(y)$; $u_x\|_{x=0} = \psi(y)$ Ответ: $u = \left(1+2x-e^{2x}\right)e^y + \varphi(y) + \frac{1}{2}\int_y^{2x+y} \psi(z)dz$	ОПК-1
2	Методом Даламбера решить задачу коши: $u_{tt} = 4u_{xx}$, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, $u(x,0) = \cos 2x$, $u_t(x,0) = -4\sin 2x$. Ответ. $u(x,t) = \cos\left(2(x+at)\right)$.	ОПК-1
3	По фазовой плоскости построить функцию $u(x,t_0)$, где $t_0 > \frac{l}{a}$ при движении волны отклонения. Ответ:	ОПК-1

	$u(x,t_0)=\begin{cases}0, & x<-at_0-l;\\ \frac{1}{2}\varphi(x+at_0), & -at_0-l<x<-at_0+l;\\ 0, & -at_0+l<x<at_0-l;\\ \frac{1}{2}\varphi(x-at_0), & at_0-l<x<at_0+l;\\ 0, & x>at_0+l.\end{cases}$	
4	По фазовой плоскости построить функцию $u(x_0,t)$ для точки x_0, где $0<x_0<l$ при движении волны импульса. Ответ: $u(x_0,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\varphi(x_0-at)+\varphi(x_0+at)), & 0<t<\frac{l-x_0}{a};\\ \frac{1}{2}\varphi(x_0-at), & \frac{l-x_0}{a}<t<\frac{l+x_0}{a};\\ 0, & t>\frac{l+x_0}{a}.\end{cases}$	ОПК-1
5	В момент времени $t=0$ полуограниченная струна со свободным концом $x=0$ возбуждена начальным отклонением. Изобразить графически отражение волны отклонения от свободного конца $x=0$. 	ОПК-1

	 $t=\frac{5}{2}\frac{l}{a}$	
6	В полуполосе $0<x<l$, $t>0$ для уравнения $u_{tt}=a^2u_{xx}$ решить первую краевую задачу со следующими условиями: а) граничные условия: $u(0,t)=0,\ u(l,t)=0$, б) начальные условия: $u(x,0)=\varphi(x)$, $u_t(x,0)=\psi(x)$. Ответ. $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[A_k\cos\frac{k\pi at}{l}+B_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right]\sin\frac{k\pi x}{l}$, где A_k и B_k вычисляются по формулам: $A_k=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$, $B_k=\frac{2}{ak\pi}\int\limits_0^l\psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$.	ОПК-1
7	Найти закон колебания струны длины *l*, если плотность внешней возмущающей силы постоянна и равна $\frac{a^2}{10l}$. Концы струны закреплены. Начальное отклонение и начальная скорость равны нулю, *a* – константа, фигурирующая в уравнении колебания струны. Ответ. $u=\omega=\frac{0,4l}{\pi^3}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left((2k+1)\pi\right)^3}\left[1-\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2}\right]\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}.$	ОПК-1

3.2.3 Образец билета к зачёту:

ФГБОУ ВО «Челябинский государственный университет»
Миасский филиал
Кафедра прикладной математики

Дисциплина «уравнения математической физики»

Билет №10

1. Определение однородного и неоднородного дифференциального уравнения с частными производными.
2. Вывод уравнения колебаний струны.

3. Решить задачу Коши для уравнения $u_{xx} - 2u_{xy} + 4e^y = 0$ при $u|_{x=0} = \varphi(y)$; $u_x|_{x=0} = \psi(y)$.
4. Найти закон колебания струны длины l, если плотность внешней возмущающей силы постоянна и равна $\frac{a^2}{10l}$. Концы струны закреплены. Начальное отклонение и начальная скорость равны нулю, a – константа, фигурирующая в уравнении колебания струны.

Преподаватель А.В. Рождественский

Зав. кафедрой прикладной математики Е.В. Дутикова

3.2.4 Порядок проведения промежуточной аттестации в 6 семестре и содержание оценочных средств

Промежуточная аттестация в 6 семестре проводится в форме экзамена в два этапа.

На первом этапе студент решает две задачи и отвечает на четыре вопроса из выбранного случайным образом билета. Во время выполнения можно использовать справочные материалы. Время выполнения – 40 минут.

На втором этапе студент отвечает устно на вопросы из билета. Продолжительность – 10 минут.

Оценочные средства для промежуточной аттестации представлены базой вопросов к зачету и типовыми задачами, билетами к экзамену.

3.2.5. База вопросов к экзамену

№ п/п	Формулировка вопроса	Варианты ответов/ правильный ответ*	Код контроли-руемой компе-тенции
Раздел 2. Уравнения параболического типа			
1	Вывод уравнения теплопроводности.	[Л 2.5], с. 201-205	ОПК-3
2	Коэффициент теплопроводности и его размерность.	[Л 2.5], с. 201	ОПК-3
3	Коэффициент температуропроводности и его размерность.	[[Л 2.5], с. 205	ОПК-3
4	Коэффициент теплоотдачи и его размерность.	[Л 2.5], с.208	ОПК-3
5	Закон теплопроводности Фурье.	[Л 2.5], с. 202	ОПК-3
6	Закон теплообмена Ньютона.	[Л 2.5], с. 207	ОПК-3

7	Вывод уравнения диффузии.	[Л 2.5], с. 205-206	ОПК-3
8	Первая краевая задача для уравнения теплопроводности.	[Л 2.5], с.208	ОПК-3
9	Вторая краевая задача для уравнения теплопроводности.	[Л 2.5], с.208	ОПК-3
10	Третья краевая задача для уравнения теплопроводности.	[Л 2.5], с.209	ОПК-3
11	Задача коши для уравнения теплопроводности.	[Л 2.5], с.209	ОПК-3
12	Принцип максимума и принцип минимума для уравнения теплопроводности.	[Л 2.5], с.211-214	ОПК-3
13	Метод Фурье для уравнения теплопроводности.	[Л 2.5], с.221-227	ОПК-3
14	Краевые задачи для уравнения теплопроводности с ненулевыми граничными условиями.	[Л 2.5], с.227-231	ОПК-3
15	Краевые задачи для уравнения теплопроводности с граничными условиями третьего рода.	[Л 2.5], с.231-236	ОПК-3
16	Распространение тепла в бесконечном стержне.	[Л 2.5], с.252-261	ОПК-3
17	Показать, что функция *у* удовлетворяет уравнению теплопроводности.	[Л 2.5], с.257-258	ОПК-3
18	Показать, что функция *у* удовлетворяет начальному условию.	[Л 2.5], с.258-261	ОПК-3
19	Фундаментальное решение уравнения теплопроводности и его физический смысл.	[Л 2.5], с.109-110	ОПК-3
20	Свойства фундаментального решения уравнения теплопроводности.	[Л 2.5], с.262-270	ОПК-3
21	Функция источника однородной краевой задачи для уравнения теплопроводности.	[Л 2.5], с.271-273	ОПК-3
22	Метод Фурье для неоднородной краевой задачи для уравнения теплопроводности.	[Л 2.5], с.134-140	ОПК-3
23	Метод функций Грина для уравнения теплопроводности	[Л 2.5], с.289-286	ОПК-3
24	Функция Грина задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой.	[Л 2.5], с.282-286	ОПК-3
ОПК-3			
25	Уравнения эллиптического типа, постановка краевых задач.	[Л 2.5], с.277-289	ОПК-3
26	Фундаментальное решение уравнения Лапласа в пространстве и на плоскости.	[Л 2.5], с.287-294	ОПК-3
27	Аналитичность гармонических функций.	[Л 2.5], с.295-296	ОПК-3
28	Первая формула Грина.	[Л 2.5],	ОПК-3

		с.297-298	
29	Иторая формула Грина.	[Л 2.5], с.298	ОПК-3
30	Первое свойство гармонических функций.	[Л 2.5], с.302	ОПК-3
31	Второе свойство гармонических функций.	[Л 2.5], с.302-303	ОПК-3
32	Третье свойство гармонических функций.	[Л 2.5], с. 303-305	ОПК-3
33	Четвёртое свойство гармонических функций.	[Л 2.5], с.306-309	ОПК-3
34	Теорема единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.	[Л 2.5], с.309-310	ОПК-3
35	Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.	[Л 2.5], с.310-311	ОПК-3
36	Метод Фурье решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге.	[Л 2.5], с.313-317	ОПК-3
37	Метод Фурье решения задачи Неймана для уравнения Лапласа в круге.	[Л 2.5], с.318-324	ОПК-3

* Правильный ответ приведен на указанной странице в учебном пособии за номером [2.5]: Тюлькин Б.М. Лекции по уравнениям математической физики: учебное пособие. Миасс: «Геотур». 2005. - 400 с., которое в количестве 50 экз. имеется в библиотеке Миасского филиала ЧелГУ.

3.2.6 Перечень типовых задач

№ п/п	Формулировка задачи , ответ	Код контро ли-руе-мой компе-тенции
1	Найти распределение температуры в стержне $0 < x < l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если температура его концов поддерживается равной нулю, а начальная температура равна произвольной функции $\varphi(x)$. Ответ: $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi x}{l}$, где $A_k=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$. ОПК-3	ОПК-3
2	В конечном стержне с теплоизолированной боковой поверхностью оба торцевых сечения теплоизолированы, а начальная температура постоянна по стержню и равна U_0. Найти распределение температуры в стержне. Ответ. $u=\frac{A_0}{2}=u_0$.	ОПК-3
3	В конечном стержне с теплоизолированной боковой поверхностью левый и пра-	ОПК-3

	вый концы теплоизолированы. В начальный момент времени распределение температуры в стержне линейное от нуля при $x = 0$ до T_0 при $x = l$. Найти распределение температуры в стержне. Ответ. $u(x,t)=\frac{T_0}{2}-\frac{4T_0}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}e^{-\left(\frac{a(2n+1)\pi}{l}\right)^2 t}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{l}$.	
4	Решить смешанную задачу: $u_t = a^2u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$, $u(0,t) = T$, $u(l,t) = U_0$, $u(x,0) = 0$. Ответ. $u(x,t)=T+\frac{(u_0-T)}{l}x+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[(-1)^k u_0-T\right]e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi x}{l}$.	ОПК-3
5	Решить уравнение: $u_t = a^2u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$, при начальной температуре $u(x,0) = \varphi(x)$, при граничных условиях: $u_x(l,t) = - hu(l,t)$, $u(0,t) = 0$. Ответ. $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\lambda_n x dx\right)e^{-\lambda_n^2a^2t}\sin\lambda_n x$.	ОПК-3
6	Решить задачу: $u_t = u_{xx}$, $0 < x < 1$, $t > 0$, $u_x(0,t) = 1$, $u(1,t) = 0$, $u(x,0) = 0$. Ответ. $u(x,t)=x-1+\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left[(2k+1)\right]^2}e^{-\left[\frac{(2k+1)}{2}\right]^2 t}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2}$.	ОПК-3
7	Решить задачу: $u_t = a^2u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$, $u(0,t) = u(l,t) = 0$, $u(x,0)=\begin{cases}c_0, & 0<x<h,\\ 0 & h\le x<l,\end{cases}$ $h < l$. Ответ. $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2C_0}{k\pi}\left(1-\cos\frac{k\pi h}{l}\right)e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi x}{l}$.	ОПК-3
8	Решить смешанную задачу: $u_t=4u_{xx}$, $0<x<1$, $t>0$, $u(x,0)=\sin 3\pi x-4-5x$, $u(0,t)=-4$, $u(1,t)=-9$. Ответ. $u(x,t)=-4-5x+e^{-(6\pi)^2 t}\sin 3\pi x$.	ОПК-3
9	Найти распределение температуры в бесконечном стержне, если начальное распределение равно: $\varphi(x)=\begin{cases}u_0 \ \text{если}\ x_1<x<x_2,\\ 0 \ \text{если}\ x<x_1,\ x>x_2.\end{cases}$	ОПК-3

10	Найти решение уравнения: $u_t = 4u_{xx} + 23e^{-4t}\sin x$, удовлетворяющее граничным условиям $u(0,t)=0$, $u(\pi,t)=0$ и начальному условию $u(x,0)=0$. Ответ. $W = 23te^{-4t}\sin x$.	ОПК-3
11	Найти решение первой внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа, если задано граничное условие $u\|_{\rho=a} = A$. *<u>Ответ.</u>* $u(\rho,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} = \frac{2A}{2} = A$.	ОПК-3
12	Найти функцию, гармоническую в кольце $1 \le \rho \le 2$ и удовлетворяющую граничным условиям $u\|_{\rho=1} = \mu_1 = const$ и $u\|_{\rho=2} = \mu_2 = const$. *<u>Ответ.</u>* $u(\rho) = 2\mu_1 + \frac{2(\mu_2-\mu_1)}{\ln 2}\ln\rho$.	ОПК-3
13	Найти решение уравнения Пуассона $\Delta u = 1$ внутри круга радиуса $\rho = a$, если $\upsilon\|_{\rho=a} = 0$. <u>Ответ.</u> $u = -\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}\rho^2 = \frac{1}{4}(\rho^2 - a^2)$.	ОПК-3

3.2.7 Образец билета к экзамену:

ФГБОУ ВО «Челябинский государственный университет»
Миасский филиал
Кафедра прикладной математики

Направление «Прикладная математика и информатика»
Дисциплина «уравнения математической физики»
Билет № 1

1. Предмет уравнений математической физики
2. Определение дифференциального уравнения с частными производными
3. Свойства собственных чисел и собственных функций
4. Распространение тепла в бесконечном стержне
5. В полуполосе $0 < x < l$, $t > 0$ для уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ решить первую краевую задачу со следующими условиями:
   а) граничные условия:
   $u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,$
   б) начальные условия:
   $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$.
6. Найти решение первой внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа, если задано граничное условие $u|_{\rho=a} = A$.

Преподаватель /А.В. Рождественский/

Зав. кафедрой / Е.В. Дутикова/

4. КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

4.1. Критерии оценивания компетенций в ходе промежуточной аттестации

Код компе-тенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине	Критерии оценивания			
		Отлично	Хорошо	Удовлетвори-тельно	Неудовлетвори-тельно
ОПК-1	*Знает* основные понятия математической физики: классификацию дифференциальных уравнений математической физики, основные теоремы. *Умеет* решать дифференциальные задачи для уравнений гиперболического типа методами Даламбера и Фурье. *Владеет* навыками доказательства утверждений и решения задач математической физики гиперболического типа.	Свободно оперирует понятиями, терминами, точно формулирует определения и теоремы, понимает взаимосвязь между понятиями; применяет теорию для решения задач, может обосновать решение; решает задачи на доказательство утверждений, знает доказательство основных теорем	Уверенно оперирует понятиями, терминами, формулирует определения и теоремы, понимает взаимосвязь между понятиями; применяет теорию для решения задач, может обосновать решение; решает некоторые задачи на доказательство утверждений, знает доказательство некоторых теорем	Частично владеет понятиями, терминами, ошибочно формулирует некоторые определения и теоремы, не четко понимает взаимосвязь между понятиями; затрудняется в применении теории для решения задач, задачи решает, но не может обосновать решение; не решает задачи на доказательство утверждений, не знает доказательство основных теорем	Не владеет понятиями, терминами, ошибочно формулирует или не формулирует определения и теоремы, не понимает взаимосвязь между понятиями; не может применять теорию для решения задач, не может обосновать решение или решить задачу; не решает задачи на доказательство утверждений, не знает доказательство основных теорем
ОПК-3	*Знает* дифференциальные уравнения параболического и эллиптического типов и описываемые ими физические процессы. *Умеет* решать дифференциальные задачи для уравнений параболического и эллиптического типов методами Фурье и Грина. *Владеет* навыками доказательства	Знает области применения теории дифференциальных уравнений в частных производных для решения практических задач, приводит примеры; решает задачи на применение свойств уравнений в частных производных; уверенно решает	Знает области применения теории дифференциальных уравнений в частных производных для решения практических задач, приводит примеры; решает некоторые задачи на применение свойств уравнений в частных	Знает некоторые области применения теории дифференциальных уравнений в частных производных для решения практических задач; решает с подсказкой некоторые задачи на применение свойств теории дифференциальных уравнений в частных производных для	Не знает области применения теории дифференциальных уравнений в частных производных для решения практических задач; не решает задачи с применением свойств уравнений в частных производных; не умеет решать задачи маетематической физики

	утверждений и решения задач математической физики параболического и эллиптического типов.	задачи маетематической физики	производных; решает некоторые задачи математической физики.	решения практических задач; неуверенно решает задачи математической физики	

4.2. Критерии оценивания зачета

Письменный и письменно-устный ответ студента по вопросам дисциплины оценивается положительно с выставлением оценки **«зачтено»** в следующем случае:
– студент обнаруживает знание и понимание основных положений учебного материала, возможно, допускает неточности и несущественные ошибки в определении понятий, формулировке положений, не допускает или допускает незначительные ошибки в решении задач.

Оценка **«не зачтено»** за письменный и письменно-устный ответ студента по вопросам дисциплины выставляется в случаях, когда:
– студент имеет разрозненные, бессистемные знания: не умеет выделять главное и второстепенное; допускает ошибки в определении понятий, формулировке теоретических положений, искажает их смысл; беспорядочно и неуверенно излагает материал;
– не умеет соединять теоретические положения с практикой; не умеет применять знания для обоснования и объяснения фактов.

4.3. Критерии оценивания экзамена

«Отлично» (5) – студент глубоко и полно владеет содержанием учебного материала; умеет связывать теорию с практикой, теоретические выводы подтверждает примерами, фактами, данными научных исследований; осуществляет межпредметные связи, предложения. Делает выводы логично, четко. Ясно и кратко излагает ответы на поставленные вопросы; умеет обосновывать свои суждения и профессионально-личностную позицию по излагаемому вопросу. Ответ носит самостоятельный характер.

«Хорошо» (4) – ответ студента соответствует указанным выше критериям, но содержание ответа имеет отдельные неточности (несущественные ошибки) в изложении теоретического и практического материала, отличается меньшей обстоятельностью, глубиной, обоснованностью и полнотой; допущенные ошибки исправляются студентом после дополнительных вопросов экзаменатора.

«Удовлетворительно» (3) – студент обнаруживает знание и понимание основных положений учебного материала, но излагает его неполно, непоследовательно, допускает неточности и существенные ошибки в определении понятий, формулировке положений, не привлекает для аргументации ответа основные положения исследовательских, концептуальных, не умеет обосновать свои суждения; наблюдается нарушение логики изложения. Ответ отличается низким уровнем самостоятельности, не содержит собственной профессионально-личностной позиции.

«Неудовлетворительно» (2) – студент имеет разрозненные, бессистемные знания: не умеет выделять главное и второстепенное; допускает ошибки в определении понятий, формулировке теоретических положений, искажает их смысл; не ориентируется в программно-методических, исследовательских материалах, беспорядочно и неуверенно излагает материал; не умеет соединять теоретические положения с практикой; не умеет применять знания для обоснования и объяснения фактов, не устанавливает межпредметные связи.

4.4. **Результаты промежуточной аттестации и уровни сформированности компетенций**

Уровень освоения компетенций	Оценка на зачёте	Оценка на экзамене
Продвинутый	зачтено	отлично
Базовый	зачтено	хорошо
Пороговый	зачтено	удовлетворительно
компетенции не сформированы	не зачтено	неудовлетворительно

Уровни формирования компетенций:

1. Пороговый уровень:

• предполагает формирование компетенций на начальном уровне: знание основ уравнений математической физики;

• студент способен давать ответы на теоретические вопросы дисциплины на удовлетворительном уровне.

2. Базовый уровень:

• предполагает формирование компетенций на более высоком уровне: формируется комплексное знание особенностей и применения методов уравнений математической физики;

• студент способен давать развернутые ответы на теоретические вопросы дисциплины; способен решать практические задания.

3. Продвинутый уровень:

• предполагает формирование компетенций на высоком уровне, использует полученные знания и умения при изучении смежных дисциплин, обнаруживает готовность к самостоятельной профессиональной деятельности;

• студент способен аргументировать собственную точку зрения, формулировать собственные выводы на основе применения усвоенных компетенций.