

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

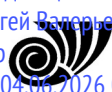
ФИО: Таскаев Сергей Валерьевич

Должность: Ректор

Дата подписания: 04.06.2026 09:20:17

Уникальный программный ключ:

891934b8c2cf7b6350c9f51cdd3096e87761f7



МИНОБРАЗОВАНИЯ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное

учреждение высшего образования

«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)

Миасский филиал

Кафедра прикладной математики

Фонд оценочных средств по дисциплине «Вариационное исчисление и оптимальное управление»
по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое
моделирование» ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

Версия документа - 1

стр. 1 из 2

Первый экземпляр _____

КОПИЯ № _____

Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации

по дисциплине

Вариационное исчисление и оптимальное управление

Направление подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)
Математическое моделирование

Присваиваемая квалификация
бакалавр

Форма обучения
очная

Миасс 2026 г.

01.03.02 Прикладная математика и информатика, Математическое моделирование, Вариационное исчисление и оптимальное управление, 2026, очная

Фонд оценочных средств одобрен и рекомендован:

Проректор по учебной работе утверждено 27.02.26 А.А. Саламатов

Ученым советом Миасского филиала ФГБОУ ВО "ЧелГУ"

Протокол заседания № 8 от 24.02.2026

Председатель Ученого совета
Миасского филиала ФГБОУ ВО
"ЧелГУ"

согласовано

Т.В. Малькова

Заседанием кафедры прикладной математики

Протокол заседания № 6 от 30.01.2026

Заведующий кафедрой


согласовано

Е.В. Дутикова

Автор (составитель)


И.И. Валов

Структура фонда оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине соответствует приказу ректора ФГБОУ ВО «ЧелГУ» от 27.09.2022 г. № 573-1 «Об утверждении шаблонов документов».

	МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ») Миасский филиал Кафедра прикладной математики		
	Фонд оценочных средств по дисциплине «Вариационное исчисление и оптимальное управление» по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование» ФГБОУ ВО «ЧелГУ»		
Версия документа - 1	стр. 3 из 25	Первый экземпляр _____	КОПИЯ № _____

Содержание

1.	Паспорт фонда оценочных средств.....	4
2.	Перечень формируемых компетенций.....	4
2.1.	Компетенции, закреплённые за дисциплиной.....	4
3.	Содержание оценочных средств по дисциплине.....	6
3.1	Виды оценочных средств.....	6
3.2	Содержание оценочных средств.....	7
4.	Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации.	22
4.1	Порядок проведения промежуточной аттестации.....	22
4.2.	Критерии оценивания промежуточной аттестации по видам оценочных средств.....	25
4.3.	Результаты промежуточной аттестации и уровни сформированности компетенций..	27

 МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ») Миасский филиал Кафедра прикладной математики			
Фонд оценочных средств по дисциплине «Вариационное исчисление и оптимальное управление» по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование» ФГБОУ ВО «ЧелГУ»			
Версия документа - 1	стр. 4 из 25	Первый экземпляр _____	КОПИЯ № _____

1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Направление подготовки: *01.03.02 Прикладная математика и информатика*

Направленность (профиль) *Математическое моделирование*

Дисциплина: *Вариационное исчисление и оптимальное управление*

Семестр изучения: 7

Форма промежуточной аттестации: *зачет*

2. ПЕРЕЧЕНЬ ФОРМИРУЕМЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ

2.1. Компетенции, закреплённые за дисциплиной

Изучение дисциплины «Вариационное исчисление и оптимальное управление» направлено на формирование следующих компетенций:

Коды компетенции (по ФГОС)	Содержание компетенций согласно ФГОС	Индикаторы достижения компетенций в соответствии с ОПОП	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине
1	2	3	4
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук; ОПК-1.2. Демонстрирует умение решать задачи, формулируемые в рамках математических и (или) естественных наук; ОПК-1.3. Имеет навыки использования основных понятий, теорем, законов математики и (или) естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.	Знать: определения, теоремы, подходы к решению задач вариационного исчисления и оптимального управления; основные теоретические положения, методы вариационного исчисления и оптимального управления; Уметь: применять математические методы при решении конкретных задач, рассматриваемых в рамках дисциплины; применять стандартные методы математического моделирования для решения типовых задач; Владеть: навыками практического использования базовых знаний и методов математики; навыками применения математического инструментария, навыками использования матема-




МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)
Миасский филиал
Кафедра прикладной математики

Фонд оценочных средств по дисциплине «Вариационное исчисление и оптимальное управление»
по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование»
ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

Версия документа - 1	стр. 5 из 25	Первый экземпляр _____	КОПИЯ № _____
----------------------	--------------	------------------------	---------------


			тического языка и математической символики при проведении исследования;
--	--	--	---

 <p>МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ») Миасский филиал Кафедра прикладной математики</p>			
Фонд оценочных средств по дисциплине «Вариационное исчисление и оптимальное управление» по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование» ФГБОУ ВО «ЧелГУ»			
Версия документа - 1	стр. 6 из 25	Первый экземпляр _____	КОПИЯ № _____

3. СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

3.1 Виды оценочных средств

№ п/п	Контролируемые темы/ разделы	Код компетенции/ планируемые результаты обучения	Наименование оценочного средства для текущего контроля	Наименование оценочного средства на промежуточной аттестации/№ задания
1	<p>Основные понятия вариационного исчисления</p> <p>Простейшая задача вариационного исчисления.</p> <p>Задача вариационного исчисления с подвижной границей</p> <p>Правило множителей Лагранжа в гладких конечномерных задачах на условный экстремум.</p> <p>Изопериметрическая задача.</p> <p>Задача Лагранжа</p> <p>Задача оптимального управления</p> <p>Численные методы для решения задач вариационного исчисления</p>	<p>ОПК-1</p> <p><i>Знает:</i> определения, теоремы, подходы к решению задач вариационного исчисления и оптимального управления; основные теоретические положения, методы вариационного исчисления и оптимального управления;</p> <p><i>Умеет:</i> применять математические методы при решении конкретных задач, рассматриваемых в рамках дисциплины; применять стандартные методы математического моделирования для решения типовых задач;</p> <p><i>Владеет:</i> навыками практического использования базовых знаний и методов математики; навыками применения математического инструментария,</p>	Контрольные работы Лабораторные работы	Задания теста Вопросы к зачёту

	МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ») Миасский филиал Кафедра прикладной математики		
	Фонд оценочных средств по дисциплине «Вариационное исчисление и оптимальное управление» по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование» ФГБОУ ВО «ЧелГУ»		
Версия документа - 1	стр. 7 из 25	Первый экземпляр _____	КОПИЯ № _____

		навыками исполь- зования математи- ческого языка и математической символики при проведении ис- следования;		
--	--	--	--	--


Типовые задания, критерии и показатели оценивания в рамках текущего контроля представлены в рабочей программе дисциплины (модуля). Полные комплекты оценочных средств и контрольно-измерительных материалов хранятся на кафедре.

3.2. Содержание оценочных средств для текущей аттестации Тестовые задания по дисциплине «Вариационное исчисление и оптимальное управление»

Вопросы открытого типа (1–10)

№	Вопрос
1	Дайте определение функционала. Чем функционал принципиально отличается от обычной функции?
2	Сформулируйте необходимое условие слабого экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления. Запишите уравнение Эйлера.
3	Опишите различие между слабым и сильным экстремумом функционала. Приведите формальные определения окрестностей, в которых они рассматриваются.
4	Что такое первая вариация функционала? Сформулируйте необходимое условие экстремума через вариацию.
5	Запишите уравнение Эйлера-Пуассона для функционала, зависящего от производных до n -го порядка. Укажите порядок данного дифференциального уравнения.
6	В чём заключается задача вариационного исчисления с подвижной границей? Какие дополнительные условия (условия трансверсальности) должны выполняться на подвижных концах?
7	Сформулируйте правило множителей Лагранжа для гладкой конечномерной задачи на условный экстремум при наличии ограничений типа равенств.
8	Дайте постановку изопериметрической задачи. Как с помощью множителей Лагранжа она сводится к безусловной задаче вариационного исчисления?
9	Сформулируйте принцип максимума Л.С. Понтрягина. Какие переменные и функции входят в функцию Гамильтона?
10	Опишите суть прямого численного метода Рунге для приближённого решения задач вариационного исчисления. Каков пошаговый алгоритм его применения?

Вопросы закрытого типа (11–20)

 <p>МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ») Миасский филиал Кафедра прикладной математики</p>			
<p>Фонд оценочных средств по дисциплине «Вариационное исчисление и оптимальное управление» по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование» ФГБОУ ВО «ЧелГУ»</p>			
Версия документа - 1	стр. 8 из 25	Первый экземпляр _____	КОПИЯ № _____

№	Вопрос	Варианты ответов
11	Уравнение Эйлера для простейшей задачи вариационного исчисления имеет вид:	а) $F_x - \frac{d}{dt} F_x' = 0$; б) $F_x + \frac{d}{dt} F_x' = 0$; в) $F_x = C$; г) $F - x' F_x' = C$
12	Если подынтегральная функция $F(t, x, x')$ не зависит явно от t , то уравнение Эйлера имеет первый интеграл:	а) $F - x' F_x' = C$; б) $F_x' = C$; в) $F + x' F_x' = C$; г) $F_x = 0$
13	Необходимое условие слабого экстремума функционала формулируется через:	а) вторую вариацию; б) первую вариацию; в) третью производную; г) интеграл Дирихле
14	В задаче Больца функционал имеет вид:	а) $\int_{t_0}^{t_1} F, dt + \Phi_0(t_0, x_0) + \Phi_1(t_1, x_1)$; б) только интеграл; в) только терминальные слагаемые; г) сумма квадратов приращений
15	Условия трансверсальности в задаче с подвижной границей обеспечивают:	а) выполнение уравнения Эйлера внутри интервала; б) выполнение граничных условий для экстремали на подвижных концах; в) непрерывность второй производной; г) положительность второй вариации
16	Принцип максимума Понтрягина применяется для решения задач:	а) вариационного исчисления с фиксированными границами; б) оптимального управления; в) линейной алгебры; г) численного интегрирования
17	Изопериметрическая задача характеризуется наличием:	а) дополнительного интегрального ограничения; б) дифференциального ограничения; в) ограничения только на производные; г) условия периодичности
18	Уравнение Эйлера-Пуассона используется для функционалов, зависящих от:	а) производных до n -го порядка; б) только от самой функции; в) только от первой производной; г) интегральных ограничений
19	Функция Гамильтона (функция Понтрягина) в задачах оптимального управления определяется как:	а) $H = \psi \cdot f(x, u) + \lambda_0 f_0(x, u)$; б) $H = x'^2 + u^2$; в) $H = \partial L / \partial x$; г) $H = F - x' \partial F / \partial x'$
20	Метод Рунге относится к классу:	а) аналитических методов точного решения; б) прямых численных методов приближённого решения; в) методов проверки гипотез; г) методов исследования устойчивости

Вопросы на соответствие (21–25)

№	Задание
21	Установите соответствие между типом задачи вариационного исчисления и её характеристикой:




МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)
Миасский филиал
Кафедра прикладной математики

Фонд оценочных средств по дисциплине «Вариационное исчисление и оптимальное управление»
по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование»
ФГБОУ ВО «ЧелГУ»


Версия документа - 1	стр. 9 из 25	Первый экземпляр _____	КОПИЯ № _____
----------------------	--------------	------------------------	---------------

	<p>А) Простейшая задача ВИ Б) Задача со старшими производными В) Изопериметрическая задача Г) Задача Больца 1) Функционал зависит от x, x', заданы $x(t_0), x(t_1)$ 2) Функционал зависит от $x, x', \dots, x^{(n)}$, заданы значения функции и производных на концах 3) Минимизация функционала при дополнительном интегральном ограничении 4) Функционал содержит интеграл и терминальные слагаемые на границах</p>
2 2	<p>Установите соответствие между уравнением/условием и его назначением: А) Уравнение Эйлера Б) Условия трансверсальности В) Уравнение Эйлера-Пуассона Г) Принцип максимума Понтрягина 1) Необходимое условие экстремума в простейшей задаче 2) Граничные условия для подвижных концов экстремали 3) Необходимое условие для задач со старшими производными 4) Необходимое условие оптимальности в задачах управления</p>
2 3	<p>Установите соответствие между понятием и определением: А) Вариация функционала Б) Слабый экстремум В) Сильный экстремум Г) Допустимая функция 1) Линейная (главная) часть приращения функционала 2) Экстремум при малых отклонениях функции и её первой производной 3) Экстремум при малых отклонениях только функции 4) Функция, удовлетворяющая граничным условиям и условиям гладкости</p>
2 4	<p>Установите соответствие между методом решения и его характеристикой: А) Метод Эйлера (численный) Б) Метод Рунге В) Метод множителей Лагранжа Г) Метод динамического программирования 1) Замена производных конечно-разностными отношениями 2) Представление решения в виде линейной комбинации базисных функций 3) Введение вспомогательных переменных для сведения задачи с ограничениями к безусловной 4) Рекуррентное разбиение многошагового процесса на этапы</p>
2 5	<p>Установите соответствие между элементами задачи оптимального управления и их описанием: А) Управляемый процесс Б) Допустимое управление В) Оптимальный процесс Г) Функционал качества 1) Совокупность управления и соответствующей траектории системы</p>


 <p>МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ») Миасский филиал Кафедра прикладной математики</p>			
<p>Фонд оценочных средств по дисциплине «Вариационное исчисление и оптимальное управление» по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование» ФГБОУ ВО «ЧелГУ»</p>			
Версия документа - 1	стр. 10 из 25	Первый экземпляр _____	КОПИЯ № _____

	<p>2) Функция управления, удовлетворяющая ограничениям и переводящая систему в требуемое состояние</p> <p>3) Допустимый процесс, доставляющий экстремум критерию эффективности</p> <p>4) Математическое выражение цели управления (минимизация/максимизация)</p>
--	--


№ задания	Верный ответ	Критерии оценивания
1	Функционал — отображение, ставящее в соответствие функции (или вектору функций) число. Отличие от функции: аргументом является не точка, а целая функция/кривая.	2 балла: точное определение + чёткое указание различия. 1 балл: определение без различия или неточная формулировка. 0 баллов: ответ неверен.
2	Необходимо, чтобы первая вариация $\delta J = 0$. Уравнение Эйлера: $F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} = 0$.	2 балла: верное условие + точная запись уравнения. 1 балл: только уравнение или только условие. 0 баллов: ответ неверен.
3	Слабый: экстремум в окрестности C^1 . Сильный: экстремум в окрестности C^0 . Сильный экстремум подразумевает слабый, но не наоборот.	3 балла: верные определения обоих типов + указание включения. 2 балла: верные определения без сравнения. 1 балл: частично верно. 0 баллов: неверно.
4	Вариация $\delta J[x, h]$ — линейная по h часть приращения функционала. Необходимое условие: $\delta J[x^\square, h] = 0$ для всех допустимых $h(t)$.	2 балла: верное определение вариации + условие $\delta J = 0$. 1 балл: только

 <p>МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ») Миасский филиал Кафедра прикладной математики</p>			
<p>Фонд оценочных средств по дисциплине «Вариационное исчисление и оптимальное управление» по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование» ФГБОУ ВО «ЧелГУ»</p>			
Версия документа - 1	стр. 11 из 25	Первый экземпляр _____	КОПИЯ № _____

		одно из двух. 0 баллов: неверно.
5	$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \left(\frac{\partial F}{\partial x^{(k)}} \right) = 0$. Порядок уравнения: $2n$.	2 балла: верная формула + указание порядка. 1 балл: формула верна, порядок не указан или наоборот. 0 баллов: неверно.
6	Границы t_0, t_1 или значения $x(t_0), x(t_1)$ не фиксированы. Условия трансверсальности: $(F - x' F_x) \delta t + F_x \delta x \Big _{t_0}^{t_1} = 0$.	3 балла: суть задачи + точная формулировка условий. 2 балла: суть без формулы. 1 балл: частичное понимание. 0 баллов: неверно.
7	Функция Лагранжа $L = f_0 + \sum \lambda_i f_i$. В точке условного экстремума $\nabla L = 0$, λ_i — множители.	2 балла: запись функции Лагранжа + условия стационарности. 1 балл: только запись или только условия. 0 баллов: неверно.
8	Найти экстремум $J[x]$ при условии $I[x] = C$. Вводится $F^\square = F + \lambda I$, решается уравнение Эйлера для F^\square .	3 балла: постановка + механизм сведения через λ . 2 балла: только постановка или только механизм. 1 балл: частичное понимание. 0 баллов: неверно.

 <p>МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ») Миасский филиал Кафедра прикладной математики</p>			
<p>Фонд оценочных средств по дисциплине «Вариационное исчисление и оптимальное управление» по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование» ФГБОУ ВО «ЧелГУ»</p>			
Версия документа - 1	стр. 12 из 25	Первый экземпляр _____	КОПИЯ № _____

9	<p>Принцип: для оптимального процесса $H(\psi, x, u)$ достигает максимума по $u \in U$. Гамильтониан $H = \psi \cdot f + \lambda_0 f_0$, ψ — сопряжённые переменные.</p>	<p>3 балла: формулировка принципа + структура H. 2 балла: только принцип или только структура. 1 балл: частичное понимание. 0 баллов: неверно.</p>
10	<p>1) Выбор базисных функций. 2) Запись $x(t) \approx \sum c_i \phi_i(t)$. 3) Подстановка в J. 4) Минимизация $J(c_1, \dots, c_n)$ как функции многих переменных.</p>	<p>3 балла: полный алгоритм. 2 балла: без уточнения базиса или шага минимизации. 1 балл: частичное описание. 0 баллов: неверно.</p>
11	<p>а) $F_x - \frac{d}{dt} F_x' = 0$</p>	<p>1 балл: верный выбор. 0 баллов: неверный выбор.</p>
12	<p>а) $F - x' F_x' = C$</p>	<p>1 балл: верный выбор. 0 баллов: неверный выбор.</p>
13	<p>б) первую вариацию</p>	<p>1 балл: верный выбор. 0 баллов: неверный выбор.</p>
14	<p>а) $\int_{t_0}^{t_1} F, dt + \Phi_0(t_0, x_0) + \Phi_1(t_1, x_1)$</p>	<p>1 балл: верный выбор. 0 баллов: неверный выбор.</p>
15	<p>б) выполнение граничных условий для экстремали на подвижных концах</p>	<p>1 балл: верный выбор. 0 баллов: неверный выбор.</p>
16	<p>б) оптимального управления</p>	<p>1 балл: верный выбор. 0 баллов: неверный</p>

 <p>МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ») Миасский филиал Кафедра прикладной математики</p>			
Фонд оценочных средств по дисциплине «Вариационное исчисление и оптимальное управление» по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование» ФГБОУ ВО «ЧелГУ»			
Версия документа - 1	стр. 13 из 25	Первый экземпляр _____	КОПИЯ № _____

		выбор.
17	а) дополнительного интегрального ограничения	1 балл: верный выбор. 0 баллов: неверный выбор.
18	а) производных до n -го порядка	1 балл: верный выбор. 0 баллов: неверный выбор.
19	а) $H = \psi \cdot f(x, u) + \lambda_0 f_0(x, u)$	1 балл: верный выбор. 0 баллов: неверный выбор.
20	б) прямых численных методов приближённого решения	1 балл: верный выбор. 0 баллов: неверный выбор.
21	А–1, Б–2, В–3, Г–4	2 балла: все верно. 1 балл: 1 ошибка. 0 баллов: ≥ 2 ошибок.
22	А–1, Б–2, В–3, Г–4	2 балла: все верно. 1 балл: 1 ошибка. 0 баллов: ≥ 2 ошибок.
23	А–1, Б–2, В–3, Г–4	2 балла: все верно. 1 балл: 1 ошибка. 0 баллов: ≥ 2 ошибок.
24	А–1, Б–2, В–3, Г–4	2 балла: все верно. 1 балл: 1 ошибка. 0 баллов: ≥ 2 ошибок.
25	А–1, Б–2, В–3, Г–4	2 балла: все верно. 1 балл: 1 ошибка. 0 баллов: ≥ 2 ошибок.

Набрано	Процент	Оценка /	Уровень сформированности ОПК-1
---------	---------	----------	--------------------------------



МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)
Миасский филиал
Кафедра прикладной математики

Фонд оценочных средств по дисциплине «Вариационное исчисление и оптимальное управление»
по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование»
ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

Версия документа - 1	стр. 14 из 25	Первый экземпляр _____	КОПИЯ № _____
----------------------	---------------	------------------------	---------------

баллов	выполнения	Результат зачёта	
42–50	84–100%	Зачтено (продвинутый)	Свободно владеет аппаратом ВИ и оптимального управления, решает задачи повышенной сложности
32–41	64–83%	Зачтено (базовый)	Уверенно применяет основные теоремы, уравнения и численные методы к типовым задачам
25–31	50–63%	Зачтено (пороговый)	Знает определения и базовые формулы, допускает неточности в сложных задачах
0–24	<50%	Не зачтено	Компетенции не сформированы, материал требует повторного изучения

Контрольная работа №1

1) Вычислить значения функционала $I[x(t)] = \int_0^1 x^2(t) dt$ на кривых $x_1(t) = t$, $x_2(t) = e^t$.

Ответ: $I_1 = \frac{1}{3}$, $I_2 = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$.

2) Найти экстремаль функционала $I[x(t)] = \int_0^1 [tx'(t) - x^2(t)] dt$, $x(0) = 1$, $x(1) = \frac{1}{4}$.

Ответ: $x(t) = t$.

3) Найти экстремаль функционала $I[x(t)] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [x^2(t) - x^2(t)] dt$, $x(0) = 1$, $T = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: $x(t) = \cos t + \sin t$.

4) Найти экстремаль функционала $I[x_1(t), x_2(t)] = \int_0^1 \sqrt{1 + x_1^2(t) + x_2^2(t)} dt$,

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = 2, x_1(1) = 2, x_2(1) = 1, 2x_1 - x_2 - 3t = 0$$

Ответ: $x_1(t) = t + 1$, $x_2(t) = -t + 2$.

Контрольная работа №2

1) Найти первую вариацию функционала $I[x(t)] = \int_0^1 [x^2(t) + x^2(t)] dt$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

Ответ: $\delta I = \int_0^1 [2x(t) - 2x''(t)] \delta x(t) dt$.

2) Найти экстремаль функционала



Версия документа - 1	стр. 15 из 25	Первый экземпляр _____	КОПИЯ № _____
----------------------	---------------	------------------------	---------------

$$I[x(t)] = \int_1^2 [t^2 x'(t) + 12x^2(t)] dt, \quad x(1)=1, \quad x(2)=8$$

Ответ: $x(t) = t^3$.

3) Найти экстремаль функционала $I[x(t)] = \int_0^T \frac{\sqrt{1+x'(t)}}{x(t)} dt, \quad x(0)=1, \quad x(T)=T-1$

Ответ: $x(t) = \sqrt{2-(t-1)^2}, \quad T=2$.

4) Найти экстремаль функционала $I[x_1(t), x_2(t)] = \int_0^1 [x_1'(t) + x_2'(t)] dt,$

$$x_1(0) = -1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1(1) = -1, \quad x_2(1) = 1, \quad x_1 + x_2 - 2t^2 + t + 1 = 0$$

Ответ: $x_1(t) = t^2 - t - 1, \quad x_2(t) = t^2$.

Лабораторные работы

1. Методом Эйлера найти решение задач вариационного исчисления:

1.1. $I[x(t)] = \int_0^1 [x^2(t) + x'(t) + 2x(t)e^t] dt, \quad x(0)=0, \quad x(1)=1$

1.2. $I[x(t)] = \int_1^2 [3tx'(t) - 5x(t)x^4(t)] dt, \quad x(1)=1, \quad x(2)=4$

1.3. $I[x(t)] = \int_0^{\frac{\pi}{18}} [x'(t) - 37x(t)x'(t) - 81x^2(t)] dt, \quad x(0)=1, \quad x(\frac{\pi}{18}) = -1$

2. Методом Рунге найти решение задач вариационного исчисления:

2.1. $I[x(t)] = \int_0^2 [x'(t) + tx'(t)] dt, \quad x(0)=0, \quad x(2)=0$

2.2. $I[x(t)] = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+x'(t)}}{t} dt, \quad x(1)=3+\sqrt{3}, \quad x(2)=3$


2.3. $I[x(t)] = \int_0^2 [x'(t) + x'(t)] dt, \quad x(0)=0, \quad x(2)=4$

3.3. Критерии оценивания по видам оценочных средств

Критерии оценивания контрольных работ

«отлично»

1) студент легко ориентируется в содержании учебного материала, свободно пользуется понятийным аппаратом, обладает умением связывать теорию с практикой, высказывать и обосновывать свои суждения;

	МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ») Миасский филиал Кафедра прикладной математики		
	Фонд оценочных средств по дисциплине «Вариационное исчисление и оптимальное управление» по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование» ФГБОУ ВО «ЧелГУ»		
Версия документа - 1	стр. 16 из 25	Первый экземпляр _____	КОПИЯ № _____

- 1) знает и правильно применяет формулы;
- 2) знает и правильно применяет нормативные документы;
- 3) решение задачи записано понятно, аккуратно, последовательно;
- 4) записан правильный ответ
«хорошо»
- 1) студент демонстрирует полное освоение теоретического материала, владеет понятийным аппаратом, ориентируется в изученном материале, осознанно применяет знания для решения практических задач, грамотно излагает свою позицию;
- 2) знает и применяет формулы и нормативные документы, но допускает небольшие неточности;
- 3) решение задачи записано, но не приведены формулы, с помощью которых были проведены расчеты;
- 4) записан правильный ответ
«удовлетворительно»
- 1) студент демонстрирует неполное освоение теоретического материала, плохо владеет понятийным аппаратом, плохо ориентируется в изученном материале, неуверенно излагает свою позицию;
- 2) знает отдельные формулы и нормативные документы, но допускает значительные неточности в их применении;
- 3) решение задачи записано неверно, но не приведены формулы, с помощью которых были проведены расчеты;
- 4) записан правильный ответ
«неудовлетворительно»
- 1) студент имеет разрозненные, бессистемные знания, не умеет выделять главное и второстепенное, допускает ошибки в определении понятий, искажающие их смысл;
- 2) беспорядочно и неуверенно излагает материал, не может применять знания для решения практических задач;
- 3) решение задачи записано неверно либо отсутствует;
- 4) записан неправильный ответ либо не записан ответ


Критерии оценивания лабораторных работ

«зачтено»


- 1) Работа представлена в установленный срок и оформлена в соответствии с установленными требованиями
- 2) Работа написана самостоятельно и в ней в полной мере раскрыты вопросы контрольных заданий
- 3) Используются специальные источники
- 4) работа содержит правильную формулировку понятий и категорий
- 5) в освещении вопросов заданий не содержится грубых ошибок
- 6) при решении заданий сделаны правильные и аргументированные выводы

«не зачтено»

- 1) студент не справился с заданиями
- 2) в работе не раскрыто основное содержание вопросов, имеются грубые ошибки
- 3) имеются явные признаки плагиата

	МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ») Миасский филиал Кафедра прикладной математики		
Фонд оценочных средств по дисциплине «Вариационное исчисление и оптимальное управление» по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование» ФГБОУ ВО «ЧелГУ»			
Версия документа - 1	стр. 17 из 25	Первый экземпляр _____	КОПИЯ № _____

4) оформление работы не соответствует требованиям
 Работа, по результатам проверки которой выставлена оценка «не зачтено», возвращается студенту на доработку.

	МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ») Миасский филиал Кафедра прикладной математики		
	Фонд оценочных средств по дисциплине «Вариационное исчисление и оптимальное управление» по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование» ФГБОУ ВО «ЧелГУ»		
Версия документа - 1	стр. 18 из 25	Первый экземпляр _____	КОПИЯ № _____

4. ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

4.1. Порядок проведения и содержание оценочных средств промежуточной аттестации

На зачёте студент выполняет 15 тестовых заданий. Максимальный балл за тест — 15 баллов. Если задание выполнено правильно, то оно оценивается 1 баллом. Продолжительность выполнения теста – 60 минут. После этого в течение 6 минут проходит собеседование с преподавателем по теоретическим вопросам из списка вопросов к зачёту.

База тестовых вопросов

1. Указать экстремаль функционала для следующей задачи вариационного исчисления
 $x(0) = 1, x(2) = e^4.$

$$\int_0^2 (x'^2 - 4x'e^{2t} + \sin^2 t) dt \rightarrow \text{extr};$$

1) $x = e^t$

2) $x = 2e^t$

3) $x = e^{2t}$

4) $x = e^t + c_1 t + c_2$

2. Указать экстремаль функционала для следующей задачи вариационного исчисления
 $x(0) = -1, x(2) = -\cos 4.$

$$\int_0^2 (x'^2 - 4x' \sin 2t - t^2) dt \rightarrow \text{extr};$$

1) $x = \cos 2t$

2) $x = -\cos 2t$

3) $x = \sin 2t$


4) $x = -\cos 2t + at + b$

3. Указать экстремаль функционала для следующей задачи вариационного исчисления
 $x(0) = 0, x(2) = \sin 4.$

$$\int_0^2 (x'^2 - 4x' \cos 2t + 5 \sin 3t) dt \rightarrow \text{extr};$$

1) $x = \cos 2t$

2) $x = -\sin 2t$

	МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ») Миасский филиал Кафедра прикладной математики		
	Фонд оценочных средств по дисциплине «Вариационное исчисление и оптимальное управление» по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование» ФГБОУ ВО «ЧелГУ»		
Версия документа - 1	стр. 19 из 25	Первый экземпляр _____	КОПИЯ № _____

3) $x = \sin 2t + at + b$

4) $x = \sin 2t$

4. Если функция в простейшей задаче вариационного исчисления, удовлетворяет дифференциальному уравнению Эйлера, то можно утверждать, что

1) она является экстремалью

2) она обеспечивает слабый экстремум функционала

3) она обеспечивает сильный экстремум функционала

4) она является допустимой экстремалью

5. Указать экстремаль функционала для следующей задачи вариационного исчисления

$$\int_{-1}^1 (x'^2 - 2x'e^t + \cos t) dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(-1) = \frac{1}{e}, \quad x(1) = e.$$

1) $x = e^{2t}$

2) $x = 2e^t$

3) $x = e^t$

4) $x = e^t + c_1 t + c_2$

6. Установите вид следующей задачи вариационного исчисления

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x'^2 - 2x'^2 + x^2 - 2e^t) dt \rightarrow \text{extr};$$

$$x(0) = 2, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad x'(0) = 1, \quad x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\left(2 + \frac{\pi}{2}\right).$$

1) Простейшая задача вариационного исчисления

2) Задача Больца

3) Задача со старшими производными

4) Изопериметрическая задача

7. Установите вид следующей задачи вариационного исчисления

$$\int_0^1 (x'^2 + x'^2 + 4x'^2) dt + x^2(0) + x^2(1) \rightarrow \text{extr}$$



- 1) Простейшая задача вариационного исчисления
- 2) Задача со старшими производными
- 3) Изопериметрическая задача
- 4) Задача Больца

8. Установите вид следующей задачи вариационного исчисления

$$\int_{-1}^1 (x'^2 - 2x'e^t + \cos t) dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(-1) = \frac{1}{e}, \quad x(1) = e.$$

- 1) Простейшая задача вариационного исчисления
- 2) Задача со старшими производными
- 3) Задача Больца
- 4) Изопериметрическая задача

9. Установите вид следующей задачи вариационного исчисления

$$\int_0^1 (x'^2 + t^2) dt \rightarrow \min; \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 2, \quad \int_0^1 x dt = 1.$$

- 1) Задача Больца
- 2) Задача со старшими производными
- 3) Простейшая задача вариационного исчисления
- 4) Изопериметрическая задача

10. Указать экстремаль функционала для следующей задачи вариационного исчисления

$$\int_0^1 (2x_1' + x_1'^2 - x_2'^2 + (x_1 + x_2)^2) dt \rightarrow \text{extr};$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_1(1) = 2, \quad x_2(0) = 0, \quad x_2(1) = 4.$$

- 1) $x_1 = t^2 + t$
 $x_2 = 5 - t^3$
- 2) $x_1 = t^3 + 1$
 $x_2 = t$
- 3) $x_1 = t^3 + t$
 $x_2 = 5t - t^3$
- 4) $x_1 = t^3$
 $x_2 = t^3$



11. Указать экстремаль функционала для следующей задачи вариационного исчисления

$$\int_0^1 (x_1' x_2' + 6t(x_1 + x_2)) dt \rightarrow \text{extr};$$

$$x_1(0) = 0, x_1(1) = 0, x_2(0) = 0, x_2(1) = 0.$$

1) $x_1 = t^3 - t$
 $x_2 = t^3 - t$

2) $x_1 = t^3 + 1$
 $x_2 = t$

3) $x_1 = t^2 + t$
 $x_2 = 5 - t^3$

4) $x_1 = t^3$
 $x_2 = t^3$

12. Указать экстремаль функционала для следующей задачи вариационного исчисления

$$\int_0^1 (x'^2 + x^2 + 4x^2) dt + x^2(0) + x^2(1) \rightarrow \text{extr}$$

1) $x = t^2$

2) $x = t^3$

3) $x = 0$

4) $x = e^{2t}$

13. Указать экстремаль функционала для следующей задачи вариационного исчисления

$$\int_0^1 (x'^2 + 4x^2 + 4x^2) dt + 2x^2(0) + x^2(1) \rightarrow \text{extr}$$

1) $x = t^2$

2) $x = t^3$

3) $x = e^{2t}$

4) $x = 0$

14. Указать экстремаль функционала для следующей задачи вариационного исчисления



МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)
Миасский филиал
Кафедра прикладной математики

Фонд оценочных средств по дисциплине «Вариационное исчисление и оптимальное управление»
по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование»
ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

Версия документа - 1

стр. 22 из 25

Первый экземпляр _____

КОПИЯ № _____

$$\int_0^2 (x'^2 - 4x' \sin 2t - t^2) dt \rightarrow \text{extr};$$

$$x(0) = -1$$

1) $x = \cos 2t$

2) $x = -\cos 2t$

3) $x = \sin 2t$

4) $x = -\cos 2t + at + b$

15. Указать экстремаль функционала для следующей задачи вариационного исчисления

$$\int_0^2 (x'^2 - 4x' \cos 2t + 5 \sin 3t) dt \rightarrow \text{extr};$$

$$x(0) = 0$$

1) $x = \cos 2t$

2) $x = -\sin 2t$


3) $x = \sin 2t$

4) $x = \sin 2t + at + b$

Ключ к тесту:

№ вопроса	Ответ
1	3
2	2
3	4
4	1
5	3
6	3
7	4
8	1
9	4
10	3
11	1
12	3
13	4
14	2
15	3

Вопросы к зачёту

	МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ») Миасский филиал Кафедра прикладной математики		
	Фонд оценочных средств по дисциплине «Вариационное исчисление и оптимальное управление» по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование» ФГБОУ ВО «ЧелГУ»		
Версия документа - 1	стр. 23 из 25	Первый экземпляр _____	КОПИЯ № _____

- 1 Примеры задач вариационного исчисления.
- 2 Определение функционала. Сильный и слабый экстремумы функционала.
- 3 Определение вариации функционала. Необходимое условие экстремума функционала.
- 4 Простейшая задача вариационного исчисления. Необходимое условие слабого экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления Основная лемма ВИ. Уравнение Эйлера.
- 5 Интегрирование уравнения Эйлера.
- 6 Задачи вариационного исчисления со старшими производными. Уравнение Эйлера-Пуассона.
- 7 Необходимое условие слабого экстремума для случая векторной искомой функции. Система уравнений Эйлера.
- 8 Задачи вариационного исчисления с подвижной границей. Условия трансверсальности.
- 9 Задача Больца. Условия трансверсальности.
- 10 Правило множителей Лагранжа в гладкой конечномерной задаче на условный экстремум.
- 11 Правило множителей Лагранжа в гладких бесконечномерных задачах на условный экстремум.
- 12 Изопериметрическая задача. Постановка задачи. Необходимые условия слабого локального минимума.
- 13 Постановка задачи Лагранжа. Управляемый, допустимый и оптимальный процессы. Необходимые условия слабого локального минимума в задаче Лагранжа.
- 14 Постановка задачи оптимального управления. Примеры задач оптимального управления. Определение локально оптимального процесса в сильном смысле. Формулировка принципа максимума Л.С Понтрягина.

Критерии оценивания собеседования


«зачтено»

- 1) студент демонстрирует освоение теоретического материала, владеет понятийным аппаратом, ориентируется в изученном материале
- 2) обладает умением связывать теорию с практикой, высказывать и обосновывать свои суждения

«не зачтено»

- 1) студент имеет разрозненные, бессистемные знания, не умеет выделять главное и второстепенное, допускает ошибки в определении понятий, искажающие их смысл;
- 2) беспорядочно и неуверенно излагает материал

Оценка «зачтено» в ходе промежуточной аттестации выставляется, если выполнено верно 61% и более тестовых заданий, а так же собеседовании по теоретическим вопросам получена оценка «зачтено». Если хотя бы одно из указанных условий не выполняется, то в ходе промежуточной аттестации выставляется оценка «не зачтено»

	МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ») Миасский филиал Кафедра прикладной математики		
	Фонд оценочных средств по дисциплине «Вариационное исчисление и оптимальное управление» по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование» ФГБОУ ВО «ЧелГУ»		
Версия документа - 1	стр. 24 из 25	Первый экземпляр _____	КОПИЯ № _____


Процент правильных ответов за итоговый тест	Собеседование	Оценка на зачёте
61-100%	зачтено	зачтено
Менее 61%	зачтено	не зачтено
61-100%	не зачтено	не зачтено
Менее 61%	не зачтено	не зачтено

4.2. Критерии оценивания компетенций в ходе промежуточной аттестации

Код компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине	Критерии оценивания			
		отлично	хорошо	удовлетворительно	неудовлетворительно
		зачтено			Не зачтено
ОПК-1	Знает определения, теоремы, подходы к решению задач вариационного исчисления и оптимального управления;	Знает и понимает определения, теоремы, подходы к решению задач вариационного исчисления и оптимального управления;	Знает определения, теоремы, подходы к решению задач вариационного исчисления и оптимального управления;	Знает в целом определения, теоремы, подходы к решению задач вариационного исчисления и оптимального управления;	Не знает определения, теоремы, подходы к решению задач вариационного исчисления и оптимального управления;
	Умеет применять математические методы при решении конкретных задач, рассматриваемых в рамках дисциплины;	Умеет самостоятельно применять математические методы при решении конкретных задач, рассматриваемых в рамках дисциплины;	Умеет применять математические методы при решении конкретных задач, рассматриваемых в рамках дисциплины;	Умеет применять некоторые математические методы при решении конкретных задач, рассматриваемых в рамках дисциплины;	Не умеет применять математические методы при решении конкретных задач, рассматриваемых в рамках дисциплины;
	Владеет навыками практического использования базовых знаний и методов математики;	Владеет уверенно навыками практического использования базовых знаний и методов математики;	Владеет навыками практического использования базовых знаний и методов математики;	Владеет частично навыками практического использования базовых знаний и методов математики;	Не владеет навыками практического использования базовых знаний и методов математики;

4.3. Результаты промежуточной аттестации и уровни сформированности компетенций

Уровень освоения компетенций	Оценка
Продвинутой	зачтено
Базовый	зачтено

	МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ») Миасский филиал Кафедра прикладной математики		
	Фонд оценочных средств по дисциплине «Вариационное исчисление и оптимальное управление» по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование» ФГБОУ ВО «ЧелГУ»		
Версия документа - 1	стр. 25 из 25	Первый экземпляр _____	КОПИЯ № _____

Пороговый	зачтено
Компетенции не сформированы	Не зачтено

Уровни сформированности компетенций:

1. Продвинутый уровень: получены навыки практического использования базовых знаний и методов математики, применения математического инструментария, математического языка и математической символики при проведении исследования.
2. Базовый уровень: сформированы умения применять математические методы при решении конкретных задач, рассматриваемых в рамках дисциплины, умения применять стандартные методы математического моделирования для решения типовых задач.
3. Пороговый уровень: сформированы знания основных определений, теорем, подходов к решению задач вариационного исчисления и оптимального управления, знания теоретических положений, методов вариационного исчисления и оптимального управления.