Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации

по дисциплине

Теоретическая механика

Направление подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)
Математическое моделирование

Присваиваемая квалификация
бакалавр

Форма обучения
очная

Миасс 2026 г.

01.03.02 Прикладная математика и информатика, Математическое моделирование, Теоретическая механика, 2026, очная

Фонд оценочных средств одобрен и рекомендован:
Проректор по учебной работе утверждено 27.02.26 А.А. Саламатов

Ученым советом Миасского филиала ФГБОУ ВО "ЧелГУ"

Протокол заседания № 8 от 24.02.2026

Председатель Ученого совета
Миасского филиала ФГБОУ ВО
"ЧелГУ" согласовано Т.В. Малькова

Заседанием кафедры прикладной математики

Протокол заседания № 6 от 30.01.2026

Заведующий кафедрой согласовано Е.В. Дутикова

Автор (составитель) Г.Ф. Костин

Структура фонда оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине соответствует приказу ректора ФГБОУ ВО «ЧелГУ» от 27.09.2022 г. № 573-1 «Об утверждении шаблонов документов».

Содержание

1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Направление подготовки: *01.03.02 Прикладная математика и информатика*
Направленность (профиль): *Математическое моделирование*
Дисциплина: *Теоретическая механика*
Семестр изучения: *5*
Форма промежуточной аттестации: *экзамен*

2. ПЕРЕЧЕНЬ ФОРМИРУЕМЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ

2.1. Компетенции, закреплённые за дисциплиной

Изучение дисциплины «Теоретическая механика» направлено на формирование следующих компетенций:

Коды компетенции согласно ФГОС (ОПОП ВО)	Содержание компетенций согласно ФГОС (ОПОП ВО)	Индикаторы достижения компетенции согласно ОПОП	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине
1	2	3	4
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук ОПК-1.2.Демонстрирует умение решать задачи, формулируемые в рамках математических и (или) естественных наук ОПК-1.3. Имеет навыки использования основных понятий, теорем, законов математики и (или) естественных наук для решения задач профессиональной деятельности	*Знать* - базовые понятия теоретической механики; - математический аппарат кинематики, динамики, аналитической механики; *Уметь* - решать задачи теоретической механики с использованием базовых знаний физики и математики; - понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат кинематики, динамики, аналитической механики; *Владеть* - способностью использовать базовые знания физики и математики для решения

			задач теоретической механики; - способностью понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат кинематики, динамики, аналитической механики;

3. СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

3.1 Виды оценочных средств

№ п/п	Контролируемые темы/ разделы	Код компетенции/ планируемые результаты обучения	Наименование оценочного средства для текущего контроля	Наименование оценочного средства на промежуточной аттестации
1	Статика	ОПК-1 *Знать* основные понятия и теоремы статики, аксиомы статики, общие свойства сил, способы их сложения, условия равновесия систем сил. *Уметь* заменять силы другими силами, с точки зрения равновесия, определять условия равновесия систем сил, действующих на твёрдое тело, решать задачи о равновесии тела или конструкции, состоящей из нескольких тел. *Владеть* навыками применения общих алгоритмов для решения задач статики.	Контрольная работа №1	Вопросы к экзамену Типовые задачи
2	Кинематика	ОПК-1 *Знать* основные понятия кинематики, способы, с помощью которых может быть задано движение точек или тел по отношению к выбранной системе отсчёта, виды движения тела. *Уметь* определять положение тела в пространстве в любой момент времени, определять скорости и ускорения при векторном, координатном и естественном способах задания движения. *Владеть* навыками расчета скоростей и ускорений в плоских	Контрольная работа №2	Вопросы к экзамену Типовые задачи

		механизмах.		
3	Динамика	ОПК-1 *Знать* основные понятия и аксиомы динамики, механические движения материальных тел в зависимости от причин, их вызывающих; параметры, характеризующие положение твердого тела, вращающегося вокруг точки, в базовой системе координат. *Уметь* приводить силы инерции твердого тела к простейшему виду. *Владеть* навыками интегрирования уравнений движения твердых тел.	Контрольная работа №3	Вопросы к экзамену Типовые задачи
4	Аналитическая механика	ОПК-1 *Знать* основные разделы аналитической механики; уравнения Даламбера, Лагранжа, Гамильтона. *Уметь* составлять динамические уравнения систем методом Лагранжа первого и второго рода и проводить их анализ. *Владеть* навыками выбора параметров, определяющих положение твердого тела в базовой системе координат; методами составления дифференциальных уравнений систем; методами анализа колебательных систем.	Контрольная работа №4	Вопросы к экзамену Типовые задачи

Типовые задания, контрольные работы, критерии и показатели оценивания в рамках текущего контроля представлены в рабочей программе по дисциплине. Полные комплекты оценочных средств и контрольно-измерительных материалов хранятся на кафедре и являются учебно-методическими материалами ограниченного (конфиденциального) пользования.

3.2 Порядок проведения текущей аттестации и содержание оценочных средств

Тестовые задания по дисциплине «Теоретическая механика»

Часть 1. Открытые вопросы (10 заданий)

№	Вопрос
1	Сформулируйте основные аксиомы статики. Объясните физический смысл аксиомы параллелограмма сил и аксиомы действия и противодействия.
2	Опишите геометрическое и аналитическое условия равновесия пространственной системы сходящихся сил. Как формулируется теорема о трёх силах?
3	Раскройте теорему о сложении скоростей при сложном движении точки. Дайте определения абсолютной, относительной и переносной скоростей и приведите векторную формулу их связи.
4	Объясните суть теоремы Кориолиса о сложении ускорений. При каких условиях ускорение Кориолиса обращается в нуль и как определяется его направление?
5	Опишите кинематические уравнения Эйлера для вращения твёрдого тела вокруг неподвижной точки. Какие параметры определяют ориентацию тела в пространстве (углы Эйлера)?
6	Сформулируйте три закона Ньютона. Запишите дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовой системе координат и поясните методику их интегрирования (первая и вторая задачи динамики).
7	Раскройте теорему об изменении кинетической энергии механической системы. Как с её помощью решаются задачи, в которых не требуются реакции связей?
8	Дайте определения виртуального перемещения, числа степеней свободы и идеальных удерживающих связей. Как эти понятия связаны с принципом возможных перемещений?
9	Сформулируйте принцип Д'Аламбера-Лагранжа. Запишите уравнения Лагранжа II рода для голономной системы и объясните, в чём их преимущество перед классическими уравнениями Ньютона.

10	Раскройте суть канонических уравнений Гамильтона. Как вводятся обобщённые импульсы, что представляет собой функция Гамильтона и при каких условиях она равна полной энергии системы?

Часть 2. Закрытые вопросы (10 заданий)

№	Вопрос и варианты ответов
11	Какая из аксиом статики утверждает, что к системе сил можно прибавить или отнять уравновешенную систему сил, не изменяя кинематического состояния твёрдого тела? а) Аксиома инерции; б) Аксиома параллелограмма сил; в) Аксиома присоединения и исключения уравновешенных сил; г) Аксиома действия и противодействия
12	Сколько независимых уравнений равновесия необходимо записать для пространственной системы произвольно расположенных сил? а) 2; б) 3; в) 4; г) 6
13	При каком условии ускорение Кориолиса материальной точки равно нулю? а) При поступательном переносном движении; б) При вращательном переносном движении; в) При отсутствии относительного движения; г) Все перечисленные в а) и в) верны
14	Что характеризует теорема Гюйгенса-Штейнера? а) Связь между кинетической и потенциальной энергией; б) Зависимость момента инерции относительно произвольной оси от момента инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс; в) Правило сложения угловых скоростей; г) Условие устойчивого равновесия
15	Какое количество степеней свободы имеет свободное твёрдое тело в пространстве? а) 3; б) 4; в) 5; г) 6
16	Уравнения Лагранжа II рода являются дифференциальными уравнениями:

	а) Первого порядка относительно обобщённых координат; б) Второго порядка относительно обобщённых координат; в) Интегральными уравнениями относительно скоростей; г) Алгебраическими уравнениями относительно сил реакций
17	Функция Гамильтона $H(q, p, t)$ в консервативной склерономной системе равна: а) Кинетической энергии; б) Потенциальной энергии; в) Полной механической энергии; г) Лагранжиану системы
18	Принцип Д'Аламбера-Лагранжа объединяет в себе: а) Принцип возможных перемещений статики и принцип Д'Аламбера динамики; б) Закон сохранения энергии и закон сохранения импульса; в) Теорему Кёнига и теорему о движении центра масс; г) Уравнения Эйлера и уравнения Пуассона
19	Какой вид движения твёрдого тела характеризуется тем, что любая прямая, проведённая в теле, остаётся параллельной своему первоначальному положению? а) Вращательное; б) Поступательное; в) Сферическое; г) Свободное
20	Что называется главным вектором системы сил? а) Сумма моментов всех сил относительно центра приведения; б) Геометрическая сумма всех сил системы; в) Равнодействующая сил трения; г) Сумма проекций сил на ось движения

Часть 3. Задания на соответствие (5 заданий)

№	Задание
21	Установите соответствие между разделами теоретической механики и их основным предметом изучения: 1) Статика; 2) Кинематика; 3) Динамика; 4) Аналитическая механика а) Движение тел под действием приложенных сил и сил инерции; б) Условия равновесия твёрдых тел под действием систем сил; в) Геометрические свойства движения без учёта масс и сил; г) Общие методы решения задач с использованием вариационных принципов и обобщённых координат
2	Установите соответствие между видами движения точки и выражением для её уско-

2	рения: 1) Равномерное прямолинейное; 2) Равноускоренное прямолинейное; 3) Равномерное вращательное; 4) Криволинейное общее а) $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$; б) $\vec{a} = 0$; в) $\vec{a} = \text{const}$; г) $\vec{a} = \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)$
23	Установите соответствие между теоремами динамики и условием сохранения соответствующей величины: 1) Теорема об изменении количества движения; 2) Теорема об изменении момента количества движения; 3) Теорема об изменении кинетической энергии; 4) Теорема о движении центра масс а) Сохранение механической энергии (при консервативных силах); б) Сохранение импульса (при $\sum \vec{F}{ext} = 0вСохранениемоментаимпульсапривСохранение-моментаимпульсапри); в)Сохранениемоментаимпульса(при\sum \vec{M}{ext} = 0$); г) Движение ЦМ как материальной точки с массой всей системы
24	Установите соответствие между принципами/уравнениями аналитической механики и их записью/сутью: 1) Принцип возможных перемещений; 2) Уравнения Лагранжа I рода; 3) Уравнения Лагранжа II рода; 4) Принцип Гамильтона-Остроградского а) $\delta \int_{t_1}^{t_2} L, dt = 0$; б) $\sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$; в) $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$; г) $m_i \overset{\square}{r}_i = \vec{F}_i + \sum \lambda_j \nabla f_j$
25	Установите соответствие между терминами из технической литературы по механике (EN) и их русскими эквивалентами: 1) Degree of freedom; 2) Virtual displacement; 3) Moment of inertia; 4) Generalized coordinate а) Виртуальное перемещение; б) Обобщённая координата; в) Степень свободы; г) Момент инерции

КЛЮЧИ К ТЕСТУ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

№ задания	Верный ответ	Критерии оценивания
1	Аксиомы: инерции, равновесия двух сил, присо-	**1 балл**: все аксиомы + кор-

	единения/исключения уравновешенных сил, параллелограмма сил, действия/противодействия. Параллелограмм: замена двух сил равнодействующей. Действие/противодействие: равны по модулю, противоположны, коллинеарны, приложены к разным телам.	ректный физический смысл двух указанных. **0,5 балла**: перечислены ≥3 аксиомы, но смысл раскрыт неточно. **0 баллов**: ≤2 аксиомы или грубые ошибки.
2	Геометрическое: силовой многоугольник замкнут ($\vec{R}=0$). Аналитическое: $\sum F_x=0, \sum F_y=0, \sum F_z=0$. Теорема о 3 силах: линии действия пересекаются в одной точке (для непараллельных).	**1 балл**: оба условия + теорема о 3 силах. **0,5 балла**: только одно условие или теорема без условий. **0 баллов**: неверные условия равновесия.
3	$\vec{v}_a=\vec{v}_r+\vec{v}_e$. Абсолютная – относительно неподвижной системы, относительная – относительно подвижной, переносная – точки подвижной системы, совпадающей с точкой в данный момент.	**1 балл**: формула + точные определения всех трёх скоростей. **0,5 балла**: формула без определений или путаница в терминах. **0 баллов**: неверная формула сложения.
4	$\vec{a}_a=\vec{a}_r+\vec{a}_e+\vec{a}_c$. $\vec{a}_c=2\vec{\omega}_e\times\vec{v}_r$. Равно нулю при $\vec{\omega}_e=0$ (поступат. перенос), $\vec{v}_r=0$ (нет относит. движения) или $\vec{\omega}_e \parallel \vec{v}_r$. Направление по правилу буравчика/правой руки.	**1 балл**: формула + условия нуля + правило направления. **0,5 балла**: формула без условий или наоборот. **0 баллов**: неверное выражение для $\vec{a}_c$.
5	Углы Эйлера: прецессии ψ, нутации θ, собственного вращения φ. Уравнения связывают проекции угловой скорости $\vec{\omega}$ с производными углов Эйлера ($\omega_x=\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi+\dot{\theta}\cos\varphi$ и т.д.).	**1 балл**: названы углы + приведены формулы кинематических уравнений Эйлера. **0,5 балла**: только углы без формул или только формулы без названий. **0 баллов**: путаница с кинематикой точки.
6	1-й закон (инерция), 2-й ($m\vec{a}=\vec{F}$), 3-й	**1 балл**: все 3 закона + урав-

	(действие=противодействие). Уравнения: $m\ddot{x}=F_x, m\ddot{y}=F_y, m\ddot{z}=F_z$. 1-я задача: по закону движения найти силы. 2-я задача: по силам найти закон движения (интегрирование с нач. условиями).	нения + различие 1-й и 2-й задач. **0,5 балла**: только уравнения или только законы. **0 баллов**: неверные формулы или путаница задач.
7	$dT=\sum \delta A$ (сумма работ всех сил). Позволяет находить скорости/перемещения, не вычисляя реакций идеальных связей. Для системы: $dT=d\,A^{ext}+d\,A^{\int \square}$. При консервативных силах $T+\Pi=const$.	**1 балл**: формулировка + применение для исключения реакций + закон сохранения энергии. **0,5 балла**: только формулировка или только применение. **0 баллов**: неверная теорема.
8	Виртуальное $\delta\vec{r}$ – бесконечно малое, мысленное, совместимое со связями. Число степеней свободы $s=3N-k$ (N точек, k связей). Идеальные связи: $\sum \vec{R}_i\cdot\delta\vec{r}_i=0$. Принцип: $\sum \vec{F}_i^{act}\cdot\delta\vec{r}_i=0$.	**1 балл**: все 3 определения + связь с принципом. **0,5 балла**: 2 определения или принцип без определений. **0 баллов**: неверные определения.
9	$\sum\left(\vec{F}_i-m_i\vec{a}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i=0$. Лагранж II рода: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0$. Преимущества: автоматическое исключение реакций связей, удобство для систем с голономными связями, инвариантность относительно выбора координат.	**1 балл**: принцип + уравнения + ≥2 преимуществ. **0,5 балла**: только уравнения или только принцип. **0 баллов**: неверная формулировка.
10	$p_k=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}$. Уравнения Гамильтона: $\dot{q}_k=\frac{\partial H}{\partial p_k}, \dot{p}_k=\frac{-\partial H}{\partial q_k}$. $H=\sum p_k\dot{q}_k-L$. Для склерономных консервативных систем $H=T+\Pi=E$.	**1 балл**: определение p_k + уравнения + условие равенства полной энергии. **0,5 балла**: только уравнения или только функция. **0 баллов**: неверные канонические уравнения.

11	в) Аксиома присоединения и исключения уравновешенных сил	**1 балл** за правильный выбор. **0 баллов** за ошибку.
12	г) 6	**1 балл** за правильный выбор. **0 баллов** за ошибку.
13	г) Все перечисленные в а) и в) верны	**1 балл** за правильный выбор. **0 баллов** за ошибку.
14	б) Зависимость момента инерции относительно произвольной оси от момента инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс	**1 балл** за правильный выбор. **0 баллов** за ошибку.
15	г) 6	**1 балл** за правильный выбор. **0 баллов** за ошибку.
16	б) Второго порядка относительно обобщённых координат	**1 балл** за правильный выбор. **0 баллов** за ошибку.
17	в) Полной механической энергии	**1 балл** за правильный выбор. **0 баллов** за ошибку.
18	а) Принцип возможных перемещений статики и принцип Д’Аламбера динамики	**1 балл** за правильный выбор. **0 баллов** за ошибку.
19	б) Поступательное	**1 балл** за правильный выбор. **0 баллов** за ошибку.
20	б) Геометрическая сумма всех сил системы	**1 балл** за правильный выбор. **0 баллов** за ошибку.
21	1–б, 2–в, 3–а, 4–г	**1 балл** за все верные пары.

		0,5 балла за 2–3 верные пары. **0 баллов** за ≤1 верную пару.
22	1–б, 2–в, 3–г, 4–а	**1 балл** за все верные пары. **0,5 балла** за 2–3 верные пары. **0 баллов** за ≤1 верную пару.
23	1–б, 2–в, 3–а, 4–г	**1 балл** за все верные пары. **0,5 балла** за 2–3 верные пары. **0 баллов** за ≤1 верную пару.
24	1–б, 2–г, 3–в, 4–а	**1 балл** за все верные пары. **0,5 балла** за 2–3 верные пары. **0 баллов** за ≤1 верную пару.
25	1–в, 2–а, 3–г, 4–б	**1 балл** за все верные пары. **0,5 балла** за 2–3 верные пары. **0 баллов** за ≤1 верную пару.

Шкала перевода баллов в оценку

Сумма баллов	Оценка	Уровень освоения компетенций
20–25	Отлично / Зачтено	Продвинутый
16–19	Хорошо / Зачтено	Базовый
11–15	Удовлетворительно / Зачтено	Пороговый

0–10	Неудовлетворительно / Не зачтено	Компетенции не сформированы

Текущая аттестация в 5 семестре состоит из проведения контрольных работ.

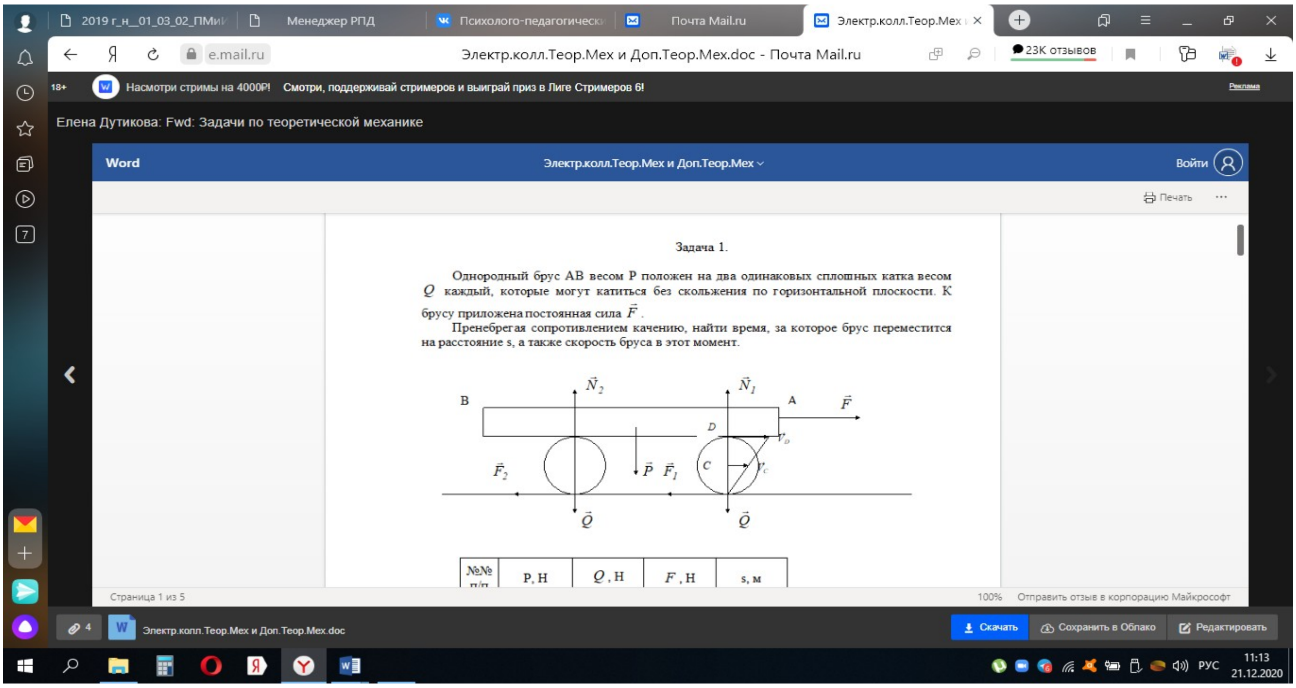
На выполнение контрольной работы дается 90 минут. Вариант работы выдается преподавателем случайным образом. Во время выполнения можно использовать справочные материалы.

Оценочные средства для текущей аттестации представлены базой контрольных работ.

3.3 Оценочные средства для проведения текущей аттестации

3.3.1 База контрольных работ

Контрольная работа №1

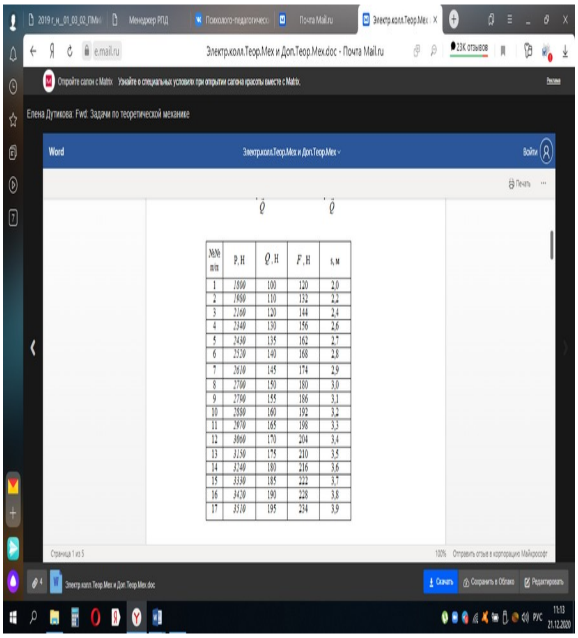


Задача 1.

Однородный брус AB весом P положен на два одинаковых сплошных катка весом Q каждый, которые могут катиться без скольжения по горизонтальной плоскости. К брусу приложена постоянная сила $\vec{F}$.

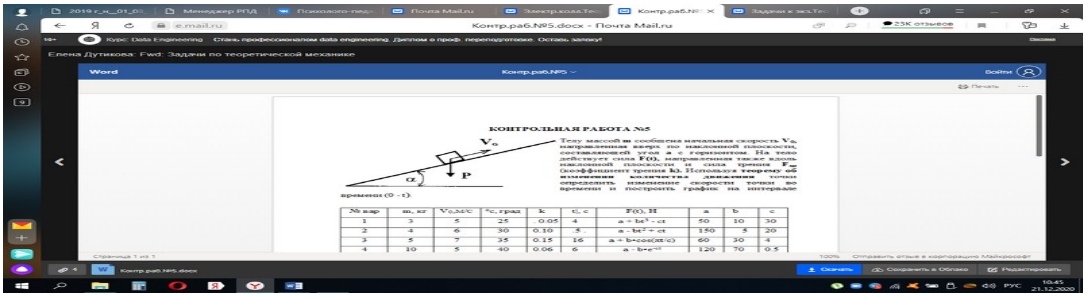
Пренебрегая сопротивлением качению, найти время, за которое брус переместится на расстояние s, а также скорость бруса в этот момент.

№№ п/п	P, H	Q, H	F, H	s, м



№№ п/п	P, Н	Q, Н	F, Н	s, м
1	1800	100	120	2,0
2	1980	110	132	2,2
3	2160	120	144	2,4
4	2340	130	156	2,6
5	2430	135	162	2,7
6	2520	140	168	2,8
7	2610	145	174	2,9
8	2700	150	180	3,0
9	2790	155	186	3,1
10	2880	160	192	3,2
11	2970	165	198	3,3
12	3060	170	204	3,4
13	3150	175	210	3,5
14	3240	180	216	3,6
15	3330	185	222	3,7
16	3420	190	228	3,8
17	3510	195	234	3,9

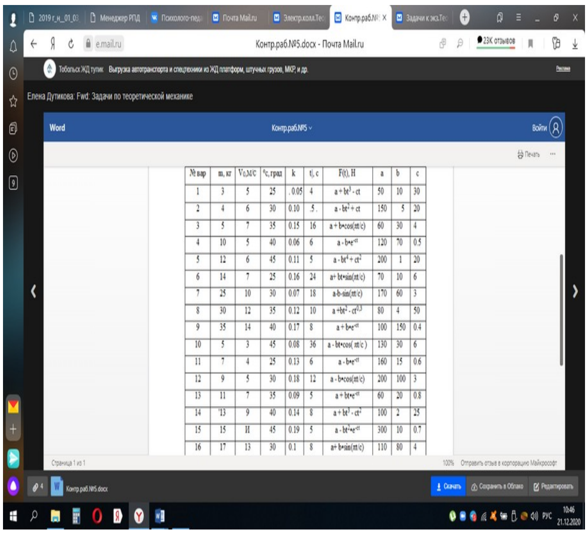
Контрольная работа №2



КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №5

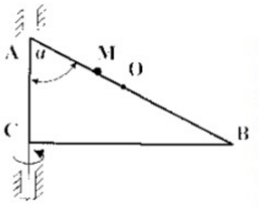
Телу массой m сообщена начальная скорость V_0, направленная вверх по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. На тело действует сила F(t), направленная также вдоль наклонной плоскости и сила трения $F_{тр}$ (коэффициент трения k). Используя **теорему об изменении количества движения** точки определить изменение скорости точки во времени и построить график на интервале времени (0 - t).

№ вар	m, кг	V₀,М/С	°c, град	k	t|, c	F(t), Н	a	b	c
1	3	5	25	. 0.05	4	a + bt³ - ct	50	10	30
2	4	6	30	0.10	.5 .	a - bt² + ct	150	5	20
3	5	7	35	0.15	16	a + b•cos(πt/c)	60	30	4
4	10	5	40	0.06	6	a - b•e⁻ᶜᵗ	120	70	0.5

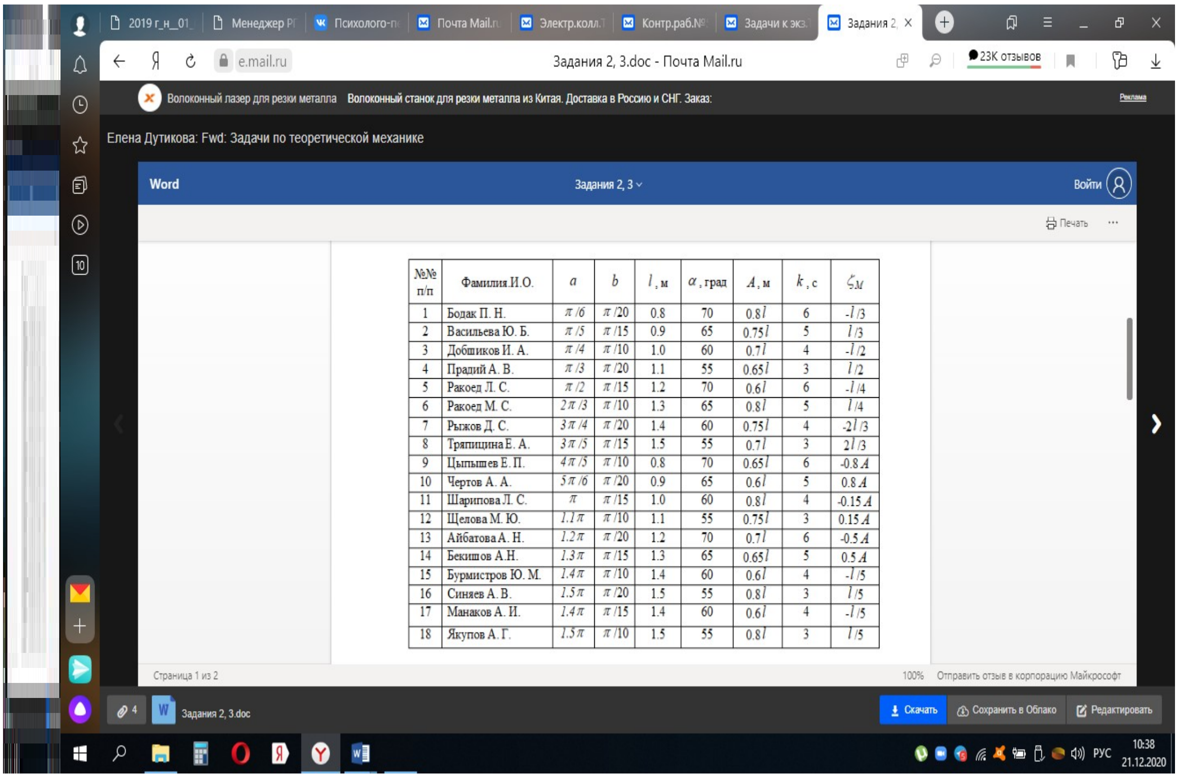


№ вар	m, кг	V_0,М/С	°c, град	k	t|, c	F(t), Н	a	b	c
1	3	5	25	. 0.05	4	$a + bt^3 - ct$	50	10	30
2	4	6	30	0.10	.5 .	$a - bt^2 + ct$	150	5	20
3	5	7	35	0.15	16	a + b•cos(πt/c)	60	30	4
4	10	5	40	0.06	6	a - b•e^{-ct}	120	70	0.5
5	12	6	45	0.11	5	$a - bt^4 + ct^2$	200	1	20
6	14	7	25	0.16	24	a+ bt•sin(πt/c)	70	10	6
7	25	10	30	0.07	18	a-b-sin(πt/c)	170	60	3
8	30	12	35	0.12	10	$a + bt^2 - ct^{0,3}$	80	4	50
9	35	14	40	0.17	8	a + b•e^{-ct}	100	150	0.4
10	5	3	45	0.08	36	a - bt•cos(πt/c)	130	30	6
11	7	4	25	0.13	6	a - b•e^{-ct}	160	15	0.6
12	9	5	30	0.18	12	a - b•cos(πt/c)	200	100	3
13	11	7	35	0.09	5	a + bt•e^{-ct}	60	20	0.8
14	'13	9	40	0.14	8	$a + bt^3 - ct^2$	100	2	25
15	15	И	45	0.19	5	a - bt²•e^{-ct}	300	10	0.7
16	17	13	30	0.1	8	a+ b•sin(πt/c)	110	80	4

Контрольная работа №3

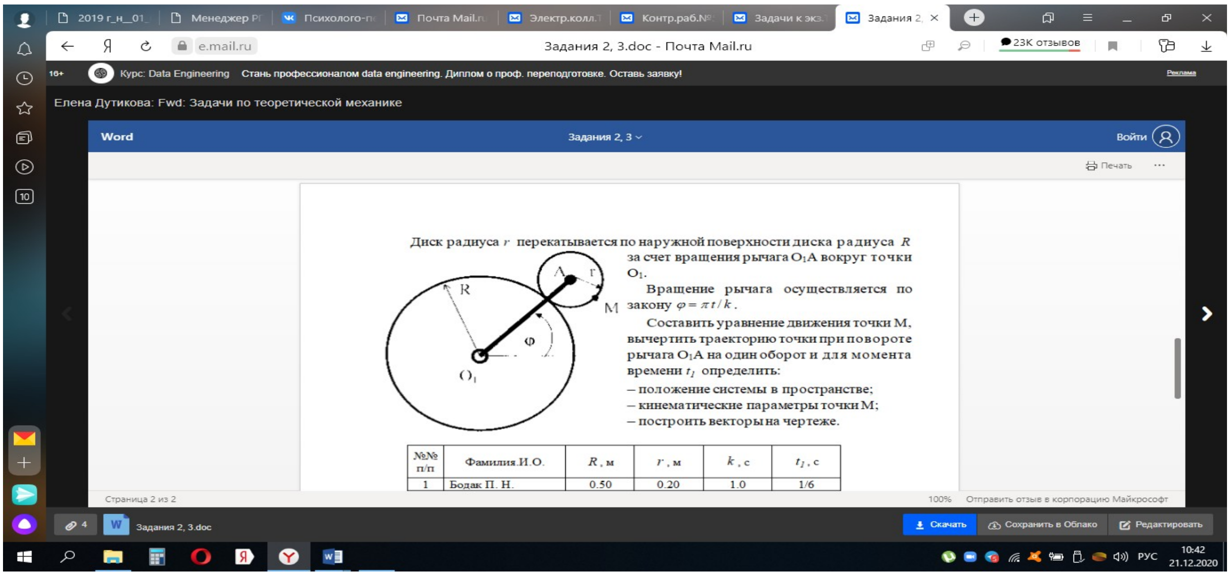


Прямоугольный треугольник ABC вращается вокруг вертикальной оси по закону . Вдоль гипотенузы длиной около её цента O колеблется точка M по закону . В некоторый момент времени точка занимает положение . Построить траекторию точки и определить ее кинематические характеристики для данного положения.



№№ п/п	Фамилия.И.О.	a	b	l, м	α, град	A, м	k, с	ζ_M
1	Бодак П. Н.	$\pi/6$	$\pi/20$	0.8	70	$0.8l$	6	$-l/3$
2	Васильева Ю. Б.	$\pi/5$	$\pi/15$	0.9	65	$0.75l$	5	$l/3$
3	Добшиков И. А.	$\pi/4$	$\pi/10$	1.0	60	$0.7l$	4	$-l/2$
4	Прадий А. В.	$\pi/3$	$\pi/20$	1.1	55	$0.65l$	3	$l/2$
5	Ракоед Л. С.	$\pi/2$	$\pi/15$	1.2	70	$0.6l$	6	$-l/4$
6	Ракоед М. С.	$2\pi/3$	$\pi/10$	1.3	65	$0.8l$	5	$l/4$
7	Рыжов Д. С.	$3\pi/4$	$\pi/20$	1.4	60	$0.75l$	4	$-2l/3$
8	Тряпицина Е. А.	$3\pi/5$	$\pi/15$	1.5	55	$0.7l$	3	$2l/3$
9	Цыпышев Е. П.	$4\pi/5$	$\pi/10$	0.8	70	$0.65l$	6	$-0.8A$
10	Чертов А. А.	$5\pi/6$	$\pi/20$	0.9	65	$0.6l$	5	$0.8A$
11	Шарипова Л. С.	π	$\pi/15$	1.0	60	$0.8l$	4	$-0.15A$
12	Щелова М. Ю.	1.1π	$\pi/10$	1.1	55	$0.75l$	3	$0.15A$
13	Айбатова А. Н.	1.2π	$\pi/20$	1.2	70	$0.7l$	6	$-0.5A$
14	Бекишов А.Н.	1.3π	$\pi/15$	1.3	65	$0.65l$	5	$0.5A$
15	Бурмистров Ю. М.	1.4π	$\pi/10$	1.4	60	$0.6l$	4	$-l/5$
16	Синяев А. В.	1.5π	$\pi/20$	1.5	55	$0.8l$	3	$l/5$
17	Манаков А. И.	1.4π	$\pi/15$	1.4	60	$0.6l$	4	$-l/5$
18	Якупов А. Г.	1.5π	$\pi/10$	1.5	55	$0.8l$	3	$l/5$

Контрольная работа №4



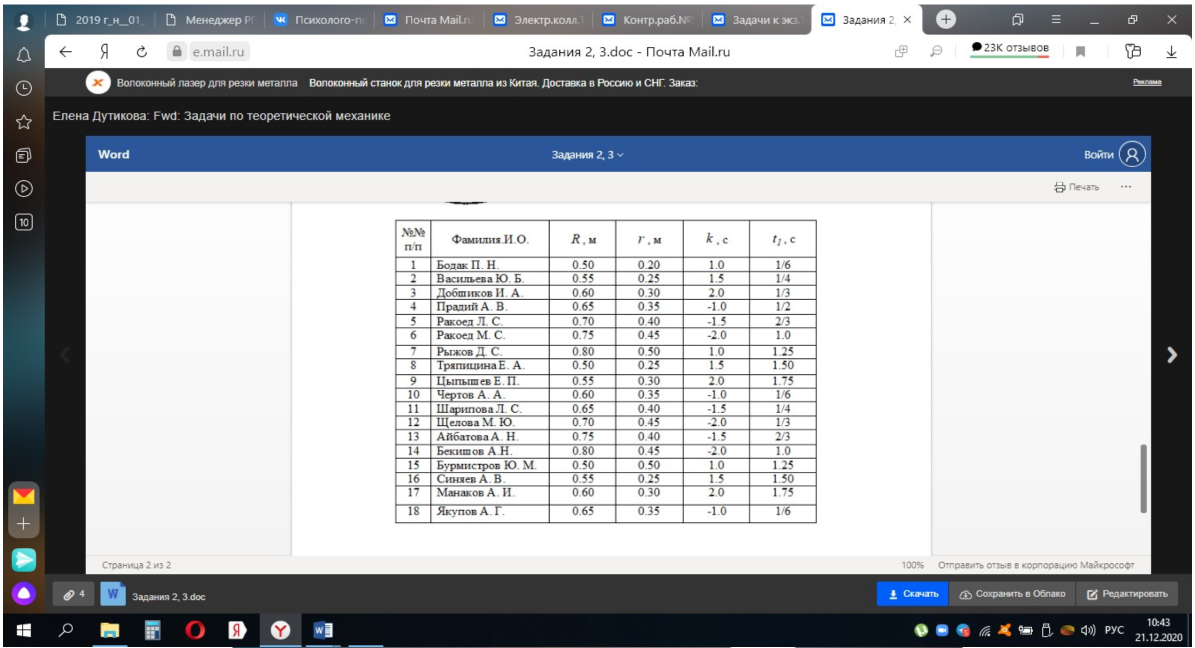
Диск радиуса r перекатывается по наружной поверхности диска радиуса R за счет вращения рычага O_1A вокруг точки O_1.

Вращение рычага осуществляется по закону $\varphi = \pi t / k$.

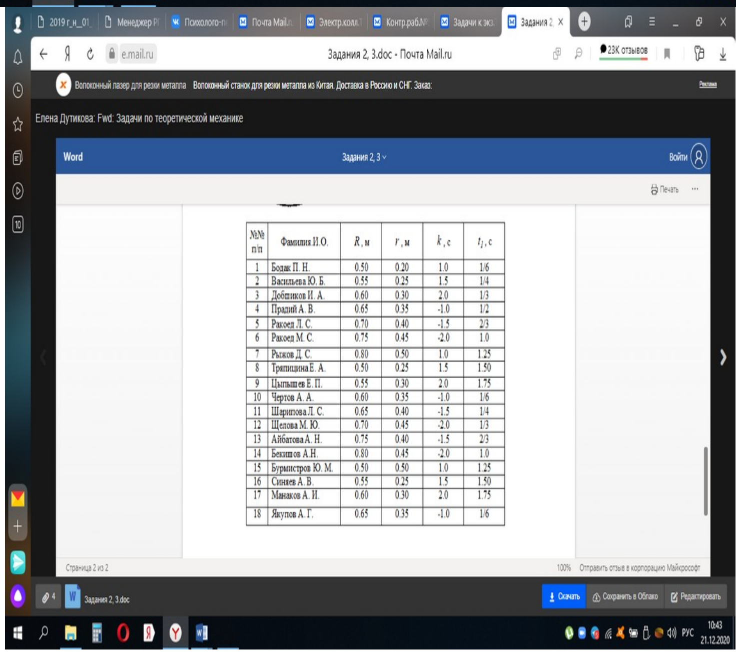
Составить уравнение движения точки M, вычертить траекторию точки при повороте рычага O_1A на один оборот и для момента времени t_1 определить:

– положение системы в пространстве;
– кинематические параметры точки M;
– построить векторы на чертеже.

№№ п/п	Фамилия.И.О.	R, м	r, м	k, с	t_1, с
1	Бодак П. Н.	0.50	0.20	1.0	1/6



№№ п/п	Фамилия.И.О.	R, м	r, м	k, с	t_1, с
1	Бодак П. Н.	0.50	0.20	1.0	1/6
2	Васильева Ю. Б.	0.55	0.25	1.5	1/4
3	Добшиков И. А.	0.60	0.30	2.0	1/3
4	Прадий А. В.	0.65	0.35	-1.0	1/2
5	Ракоед Л. С.	0.70	0.40	-1.5	2/3
6	Ракоед М. С.	0.75	0.45	-2.0	1.0
7	Рыжов Д. С.	0.80	0.50	1.0	1.25
8	Тряпицина Е. А.	0.50	0.25	1.5	1.50
9	Цыпышев Е. П.	0.55	0.30	2.0	1.75
10	Чертов А. А.	0.60	0.35	-1.0	1/6
11	Шарипова Л. С.	0.65	0.40	-1.5	1/4
12	Щелова М. Ю.	0.70	0.45	-2.0	1/3
13	Айбатова А. Н.	0.75	0.40	-1.5	2/3
14	Бекишов А.Н.	0.80	0.45	-2.0	1.0
15	Бурмистров Ю. М.	0.50	0.50	1.0	1.25
16	Синяев А. В.	0.55	0.25	1.5	1.50
17	Манаков А. И.	0.60	0.30	2.0	1.75
18	Якупов А. Г.	0.65	0.35	-1.0	1/6



3.4 Критерии оценивания текущей аттестации

3.4.1 Контрольная работа

"Отлично":

1) студент легко ориентируется в содержании учебного материала, свободно пользуется понятийным аппаратом;

2) обладает умением связывать теорию с практикой, высказывать и об-

основывать свои суждения;

3) знает и правильно применяет формулы;

4) решение задачи записано понятно, аккуратно, последовательно;

5) записан правильный ответ

"Хорошо":

1) студент демонстрирует полное освоение теоретического материала, владеет понятийным аппаратом, ориентируется в изученном материале, осознанно применяет знания для решения практических задач, грамотно излагает свою позицию;

2) знает и применяет формулы, но допускает небольшие неточности;

3) решение задачи записано, но не приведены формулы, с помощью которых были проведены расчеты;

4) записан правильный ответ

"Удовлетворительно":

1) студент демонстрирует неполное освоение теоретического материала, плохо владеет понятийным аппаратом, плохо ориентируется в изученном материале, неуверенно излагает свою позицию;

2) знает отдельные формулы, но допускает значительные неточности в их применении;

3) решение задачи записано неверно, не приведены формулы, с помощью которых были проведены расчеты;

4) записан правильный ответ

"Неудовлетворительно":

1) студент имеет разрозненные, бессистемные знания, не умеет выделять главное и второстепенное, допускает ошибки в определении понятий, искажающие их смысл;

2) беспорядочно и неуверенно излагает материал, не может применять знания для решения практических задач;

3) решение задачи записано неверно либо отсутствует;

4) записан неправильный ответ либо не записан ответ.

Отметка «отлично» ставится в том случае, если по четырём из пяти критериев ответ оценивается «отлично» и по одному – на «хорошо».

Отметка «хорошо» – если по четырём критериям – не ниже «хорошо» и по одному «удовлетворительно».

Отметка «удовлетворительно» – если по четырём критериям не ниже «удовлетворительно» и по одному – «неудовлетворительно».

Отметка «неудовлетворительно» – если по двум и более критериям «неудовлетворительно».

4. КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

4.1 Порядок проведения экзамена

Промежуточная аттестация в 5 семестре проводится в форме экзамена в два этапа.

На первом этапе студент решает две задачи и отвечает на два вопроса из выбранного случайным образом билета. Во время выполнения можно использовать справочные материалы. Время выполнения – 40 минут.

На втором этапе студент отвечает устно на вопросы из билета. Продолжительность – 10 минут.

Оценочные средства для промежуточной аттестации представлены базой типовых задач и базой вопросов к экзамену.

4.2 Критерии оценивания экзамена

Письменный и письменно-устный ответ студента по вопросам дисциплины оценивается следующим образом:

"**Отлично**" – студент глубоко и полно владеет содержанием учебного материала; умеет связывать теорию с практикой, решает соответствующие задачи, теоретические выводы подтверждает примерами. Делает выводы логично, четко. Ясно и кратко излагает ответы на поставленные вопросы; умеет обосновывать свои суждения. Дан полный, развёрнутый ответ на поставленный вопрос; показана совокупность осознанных знаний об объекте изучения, утверждения приведены с доказательствами, свободно оперирует понятиями, терминами; в ответе прослеживается чёткая структура, выстроенная в логической последовательности; ответ изложен литературным грамотным языком и носит самостоятельный характер; все решения задач выполнены верно.

"**Хорошо**"– ответ студента соответствует указанным выше критериям, но содержание ответа имеет отдельные неточности (несущественные ошибки) в изложении теоретического и практического материала, отличается меньшей обстоятельностью, глубиной, обоснованностью и полнотой; были допущены неточности в определении понятий, допущены незначительные ошибки в решении задач, допущенные ошибки исправляются студентом после дополнительных вопросов экзаменатора.

"**Удовлетворительно**" – студент обнаруживает знание и понимание основных положений учебного материала, но излагает его неполно, непоследовательно, допускает неточности и существенные ошибки в определении понятий, формулировке положений, наблюдается нарушение логики изложения;

в ответе не присутствуют доказательные выводы; сформированность умений показана слабо, допущены незначительные ошибки в решении задач.

"**Неудовлетворительно**" – студент имеет разрозненные, бессистемные знания: не умеет выделять главное и второстепенное; допускает ошибки в определении понятий, формулировке теоретических положений, искажает их смысл; беспорядочно и неуверенно излагает материал; не умеет соединять теоретические положения с практикой; не умеет применять знания для обоснования и объяснения фактов, не устанавливает межпредметные связи.

4.3 База вопросов к экзамену

№ п/п	Формулировка вопроса	Варианты ответов/ правильный ответ/ план ответа	Код контролируемой компетенции
1	Аксиомы статики.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
2	Равновесие трех сходящихся сил.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
3	Приведение системы сил к произвольному центру.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
4	Приведение системы параллельных, антипараллельных сил.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
5	Условия равновесия системы сил.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
6	Способы задания движения точки.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
7	Скорость и ускорение в декартовой системе координат.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
8	Скорость и ускорение в проекциях на оси естественного трехгранника.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
9	Сложение скоростей при сложном движении точки.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
10	Сложение ускорений при сложном движении точки. Теорема Кориолиса.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
11	Скорость и ускорение твердого тела при различных видах движения.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
12	Сложение поступательных и вращательных движений тела.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
13	Кинематические уравнения Эйлера.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
14	Общий случай сложения поступательных и вращательных движений твердого тела.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
15	Основные законы динамики.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
16	Уравнения движения точки под действием сил в декартовой системе координат.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
17	Теорема об изменении количества движения материальной точки.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1

18	Теорема об изменении момента количества движения материальной точки.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
19	Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
20	Движение точки переменной массы. Уравнения Мещерского.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
21	Первая и вторая задачи Циолковского.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
22	Момент инерции твердого тела. Осевые и центробежные моменты инерции.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
23	Теорема Гюйгенса - Штейнера.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
24	Момент инерции относительно произвольной оси.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
25	Главные и центральные оси инерции.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
26	Эллипсоид инерции.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
27	Уравнение количества движения твердого тела при вращении вокруг неподвижной оси.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
28	Кинетический момент твердого тела при вращении вокруг неподвижной оси.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
29	Движение твердого тела около неподвижной точки.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
30	Динамические уравнения Эйлера.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
31	Элементарная работа силы.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
32	Виртуальные перемещения и число степеней свободы системы.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
33	Условия, налагаемые связями на вариации координат.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
34	Идеальные удерживающие связи.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
35	Принцип Гаусса.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
36	Уравнения движения механических связанных систем материальных точек.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
37	Уравнения Лагранжа I рода.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
38	Обобщенные координаты и обобщенные силы.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
39	Уравнения Лагранжа II рода.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
40	Принцип Даламбера-Лагранжа.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
41	Канонические переменные.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
42	Функция Гамильтона.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
43	Канонические уравнения движения Гамильтона.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
44	Первый интеграл канонических уравнений.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1
45	Принцип Остроградского-Гамильтона.	См. пункт 4.3.1	ОПК-1

4.3.1 Ответы на вопросы к экзамену

1. Аксиомы статики

1. Аксиома инерции (закон инерции Галилея)

Существуют такие системы отсчета, в которых любая материальная точка, не взаимодействующая с другими телами и точками, движется прямолинейно и равномерно. В частности, если тело покоилось в определенный момент времени, то оно будет покоиться и в последующие моменты.

2. Аксиома равновесия двух сил

Две силы, приложенные к абсолютно твердому телу, являются уравновешенными тогда и только тогда, когда они равны по модулю, направлены в противоположные стороны и их линии действия совпадают.

3. Аксиома присоединения и исключения уравновешивающихся сил

Кинематическое состояние твердого тела не изменится, если к действующей на него системе сил прибавить или отнять уравновешенную систему сил.

4. Аксиома параллелограмма сил

Две силы, приложенные к телу в одной точке, можно заменить их равнодействующей силой, равной векторной сумме этих сил и приложенной к той же точке.

5. Аксиома равенства действия и противодействия (3-й закон Ньютона)

Если материальная точка 1 действует на материальную точку 2 силой, то и материальная точка 2 действует на материальную точку 1 силой, равной по абсолютной величине силе и противоположно направленной ей:. При этом силы и приложены к взаимодействующим точкам и их линии действия совпадают с прямой, проведенной через эти точки.

2. Равновесие трех сходящихся сил

1. Геометрическое условие равновесия. Так как равнодействующая $\bar{R}$ сходящихся сил определяется как замыкающая сторона силового многоугольника, построенного из этих сил, то $\bar{R}$ может обратиться в нуль тогда и только тогда, когда конец последней силы в многоугольнике совпадает с началом первой, т. е. когда многоугольник замкнется.

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из этих сил, был замкнут.

2. Аналитические условия равновесия. Аналитически равнодействующая системы сходящихся сил определяется формулой $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$

Так как под корнем стоит сумма положительных слагаемых, то R обратится в нуль только тогда, когда одновременно $R_x = 0,\ R_y = 0,\ R_z = 0$, т. е. когда действующие на тело силы будут удовлетворять равенствам:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \sum F_{kz} = 0.$$

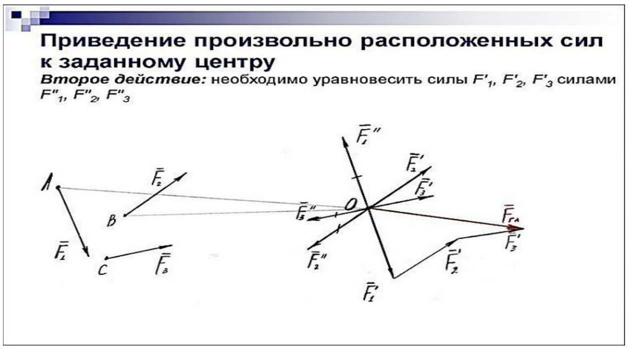
Условия равновесия в аналитической форме: для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из трех координатных осей были равны нулю.

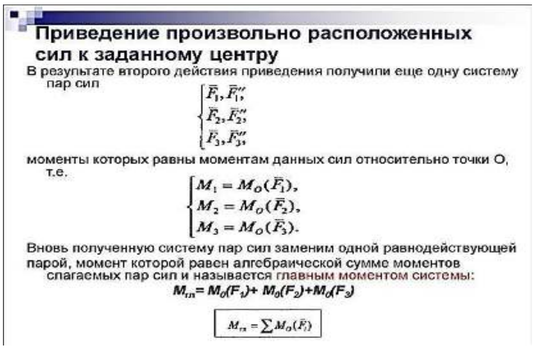
Если все действующие на тело сходящиеся силы лежат в одной плоскости, то они образуют плоскую систему сходящихся сил. В случае плоской системы сходящихся сил получим, очевидно, только два условия равновесия $\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0,$

Теорема о трех силах. Уравновешенная плоская система трех непараллельных сил является сходящейся.

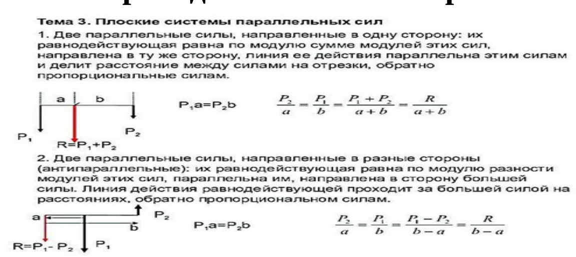
Условие «плоская» в формулировке теоремы не является необходимым - можно убедиться, что любая уравновешенная система трех сил всегда будет плоской. Это следует из условий равновесия произвольной пространственной системы сил, которые будут рассмотрены далее.

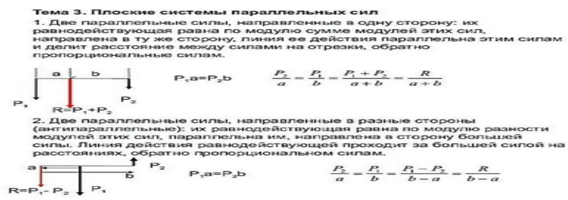
3. Приведение системы сил к произвольному центру



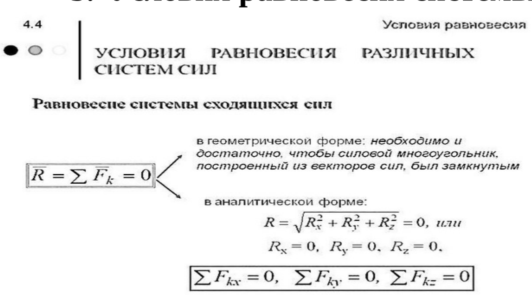


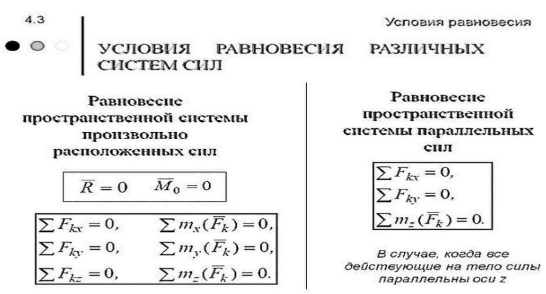
4. Приведение системы параллельных, антипараллельных сил.



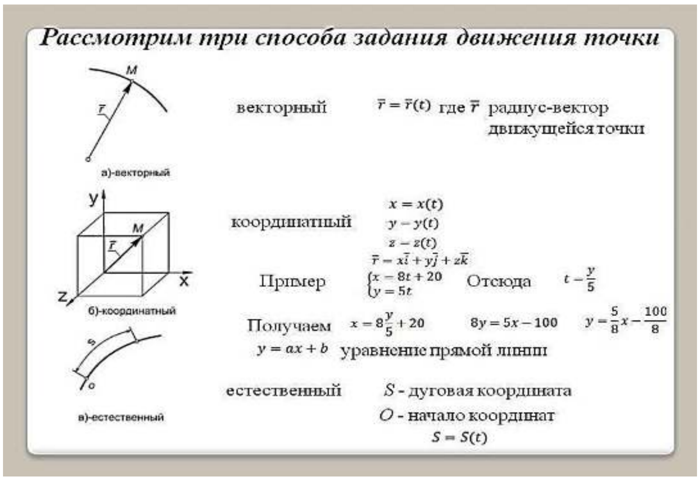


5. Условия равновесия системы сил.



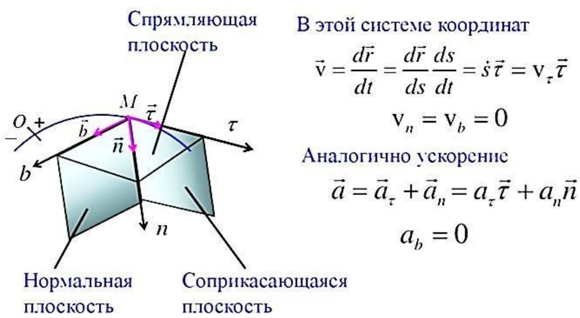


6. Способы задания движения точки.



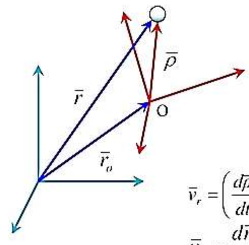
7. Скорость и ускорение в декартовой системе координат.

8. Скорость и ускорение в проекциях на оси естественного трехгранника.



9. Сложение скоростей при сложном движении точки.

Абсолютная скорость материальной точки при сложном движении равна векторной сумме относительной и переносной скоростей $\boxed{\overline{v}^a = \overline{v}^r + \overline{v}^e}$



В произвольный момент времени

$$\overline{r}(t) = \overline{r}_O(t) + \overline{\rho}(t)$$

$$\overline{v}_a = \frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{d\overline{r}_O}{dt} + \frac{d\overline{\rho}}{dt}$$

Вектор $\overline{\rho}$ определен в ПСО

$$\overline{v}_a = \frac{d\overline{r}_O}{dt} + \left(\frac{d\overline{\rho}}{dt}\right)_r + \overline{\omega}_e \times \overline{\rho}$$

$$\overline{v}_r = \left(\frac{d\overline{\rho}}{dt}\right)_r$$

Что такое переносная скорость?

$$\overline{v}_e = \frac{d\overline{r}_O}{dt} + \overline{\omega}_e \times \overline{\rho}$$

$$\boxed{\overline{v}^a = \overline{v}^r + \overline{v}^e}$$

10. Сложение ускорений при сложном движении точки. Теорема Кориолиса.

Теорема Кориолиса

(Теорема о сложении ускорений при сложном движении точки)

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_k$$

Теорема. *Абсолютное ускорение точки при сложном движении равно геометрической сумме относительного, переносного ускорений и ускорения Кориолиса .*

Относительное ускорение характеризует изменение относительной скорости в относительном движении точки.

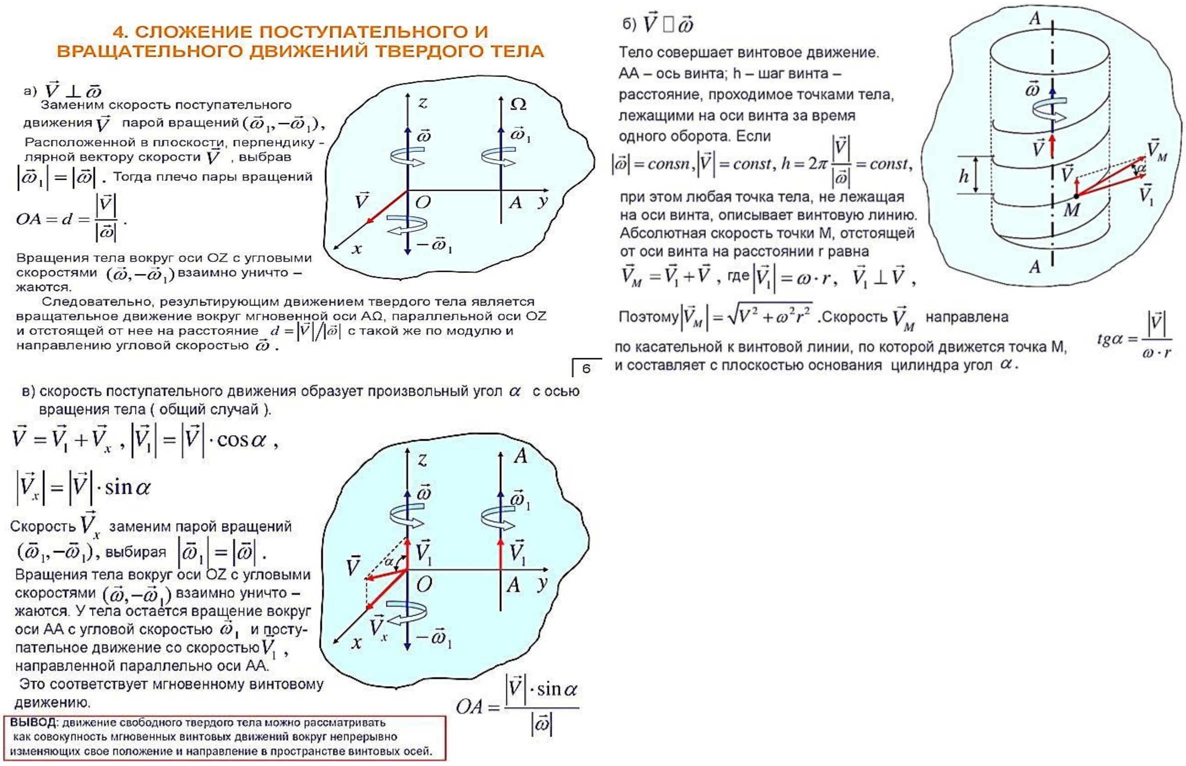
Переносное ускорение характеризует изменение переносной скорости в переносном движении точки.

11. Скорость и ускорение твердого тела при различных видах движения.

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЙ

Поступательное	Вращательное
Равномерное	
$s = v \cdot t$	$\varphi = \omega \cdot t$
$v = const$	$\omega = const$
$a = 0$	$\varepsilon = 0$
Равнопеременное	
$s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$	$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$
$v = v_0 \pm a \cdot t$	$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon \cdot t$
$a = const$	$\varepsilon = const$
Неравномерное	
$s = f(t)$	$\varphi = f(t)$
$v = \frac{ds}{dt}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

12. Скорость и ускорение твердого тела при различных видах движения.



13. Кинематические уравнения Эйлера.

14. Общий случай сложения поступательных и вращательных движений твердого тела.

Скорости и ускорения точек твердого тела в общем случае движения. Уравнения движения твердого тела в общем случае движения записываются в виде

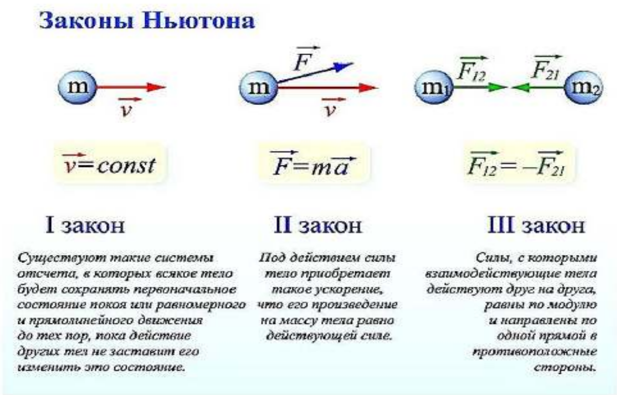
$$\left.\begin{array}{lll} x_O = f_1(t), & y_O = f_2(t), & z_O = f_3(t), \\ \psi = f_4(t), & \varphi = f_5(t), & \theta = f_6(t). \end{array}\right\}$$

Здесь x_O, y_O, z_O — координаты произвольной точки твердого тела, выбранной за полюс; ψ, φ, θ — углы Эйлера: угол прецессии, угол чистого, или собственного, вращения и угол нутации, определяющие поворот твердого тела вокруг полюса.

Скорость любой точки твердого тела в общем случае движения определяется формулой

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_1,$$

15. Основные законы динамики.



16. Уравнения движения точки под действием сил в декартовой системе координат.

17. Теорема об изменении количества движения материальной точки.

2.3.1 Теорема об изменении количества движения точки

Теорема: Изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов всех действующих на точку сил за тот же промежуток времени.

$$mV_1 - mV_0 = \sum \vec{S_i}$$

Доказательство.

Основное уравнение динамики: $m\dfrac{d\vec{V}}{dt} = \Sigma \vec{F}_i$

Так как масса точки постоянна, то уравнение, выражающее основной закон динамики, можно представить в виде

$$\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \Sigma \vec{F}_i$$

Проинтегрируем это уравнение, считая, что при $t_0 = 0$, $V = V_0$, а при $t = t_1$, $V = V_1$:

$$\int_{V0}^{V1} d(m\vec{V}) = \int_0^{t1} \Sigma \vec{F}_i dt \quad \Rightarrow \quad mV_1 - mV_0 = \sum \vec{S_i}$$

Представим полученное уравнение в проекциях на оси:

$$\begin{cases} mV_{1x} - mV_{0x} = \sum S_{ix} \\ mV_{1y} - mV_{0y} = \sum S_{iy} \\ mV_{1z} - mV_{0z} = \sum S_{iz} \end{cases}$$

18. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки.

5. Теорема об изменении момента количества движения

Момент количества движения точки M относительно точки O равен

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{r}_{OM} \times \mathbf{Q} = m(\mathbf{r}_{OM} \times \mathbf{v})$$

$$\mathbf{r}\times\mathbf{F} = \mathbf{r}\times m\mathbf{w} = \mathbf{r}\times m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times m\mathbf{v}) - \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times m\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times m\mathbf{v}) - \underbrace{\mathbf{v}\times m\mathbf{v}}_{0}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times m\mathbf{v}) = \mathbf{r}\times\mathbf{F}} \qquad \boxed{\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O}$$

$\mathbf{K}_O = \mathbf{r}\times m\mathbf{v}$ — момент количества движения материальной точки относительно центра (точки O)

$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$ — момент силы, приложенной к точке, относительно центра

Производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно какого-либо центра равна моменту силы, приложенной к точке, относительно того же центра.

19. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки.

7. Теорема об изменении кинетической энергии

Теорема. Изменение кинетической энергии при импульсивном движении равно сумме скалярных произведений каждого ударного импульса на полусумму скоростей точки его приложения непосредственно перед ударом и после него:

$$\boxed{T^+ - T^- = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{I}_k^e \cdot \frac{\mathbf{v}_k^- + \mathbf{v}_k^+}{2} + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{I}_k^i \cdot \frac{\mathbf{v}_k^- + \mathbf{v}_k^+}{2}} \qquad T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_k^2$$

Доказательство

$$m_k(\mathbf{v}_k^+ - \mathbf{v}_k^-) = \mathbf{I}_k \quad \Big|\cdot(\mathbf{v}_k^+ + \mathbf{v}_k^-)$$

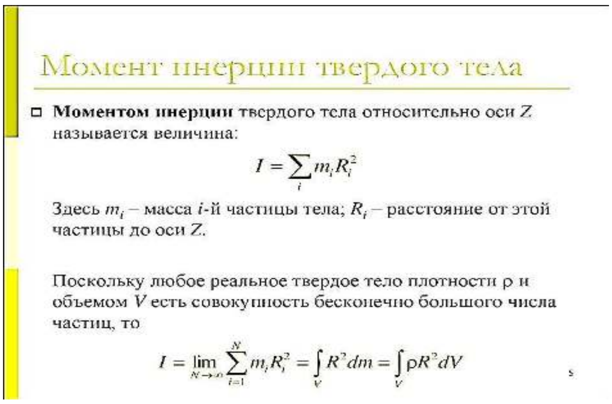
$$m_k\left((v_k^+)^2 - (v_k^-)^2\right) = \mathbf{I}_k\cdot(\mathbf{v}_k^+ + \mathbf{v}_k^-) \quad \Big|\ \sum$$

$$2(T^+ - T^-) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{I}_k\cdot(\mathbf{v}_k^+ + \mathbf{v}_k^-)$$

20. Движение точки переменной массы. Уравнения Мещерского.

21. Первая и вторая задачи Циолковского.

22. Момент инерции твердого тела. Осевые и центробежные моменты инерции.



23. Теорема Гюйгенса - Штейнера.

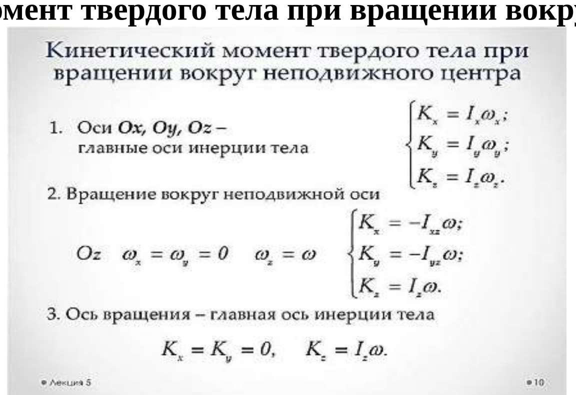
24. Момент инерции относительно произвольной оси.

25. Главные и центральные оси инерции.

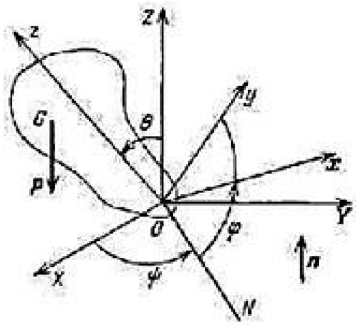
26. Эллипсоид инерции.

27. Уравнение количества движения твердого тела при вращении вокруг неподвижной оси.

28. Кинетический момент твердого тела при вращении вокруг неподвижной оси.



29. Движение твердого тела около неподвижной точки.



Твердое тело с неподвижной точкой. Системы координат

n $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ – единичный вектор вертикали

OXYZ – неподвижная система координат

Oxyz – связанная система координат

$$\gamma_1 = \sin\theta\sin\varphi,\quad \gamma_2 = \sin\theta\cos\varphi,\quad \gamma_3 = \cos\theta.$$

Компоненты единичного вектора, выраженные через углы Эйлера

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{n}}{dt} - \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{n} = 0$$

Уравнение Пуассона в векторном виде

$$\mathbf{M}_O = P\mathbf{n}\times\overline{OG}$$

Момент силы тяжести в векторном виде

a, b, c – координаты центра масс в связанной системе координат

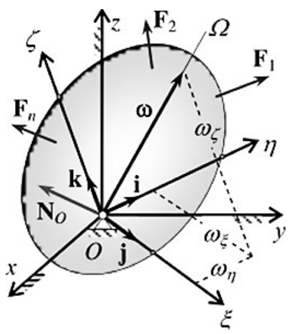
$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3,\quad \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1,\quad \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2.$$

Уравнение Пуассона в скалярном виде

$$M_x = P(\gamma_2 c - \gamma_3 b),\quad M_y = P(\gamma_3 a - \gamma_1 c),\quad M_z = P(\gamma_1 b - \gamma_2 a)$$

Момент силы тяжести в скалярном виде

30. Динамические уравнения Эйлера.



$$I_\xi\dot{\omega}_\xi + (I_\zeta - I_\eta)\omega_\eta\omega_\zeta = \sum_{i=1}^{n} m_\xi(\mathbf{F}_i),$$
$$I_\eta\dot{\omega}_\eta + (I_\xi - I_\zeta)\omega_\xi\omega_\zeta = \sum_{i=1}^{n} m_\eta(\mathbf{F}_i), \qquad (12.23)$$
$$I_\zeta\dot{\omega}_\zeta + (I_\eta - I_\xi)\omega_\xi\omega_\eta = \sum_{i=1}^{n} m_\zeta(\mathbf{F}_i).$$

31. Элементарная работа силы.

Элементарная работа силы dA равна скалярному произведению вектора силы на вектор элементарного перемещения точки

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Можно представить это уравнение в координатной форме:

$$dA = F_X\cdot dx + F_Y\cdot dy + F_Z\cdot dz$$

Полная работа силы на любом конечном перемещении $M_0 M_1$ равна взятому вдоль этого перемещения криволинейному интегралу второго типа от элементарной работы:

$$A = \int_{M_0}^{M_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} \quad \text{или} \quad A = \int_{M_0}^{M_1} F_X\cdot dx + F_Y\cdot dy + F_Z\cdot dz$$

32. Виртуальные перемещения и число степеней свободы системы.

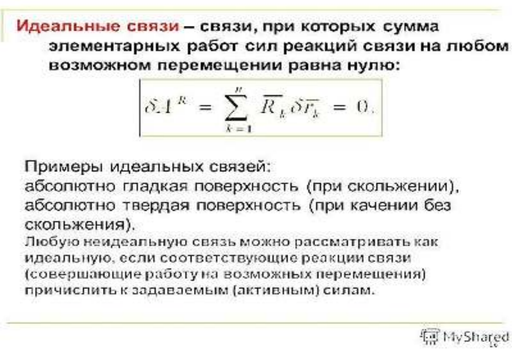
33. Условия, налагаемые связями на вариации координат.

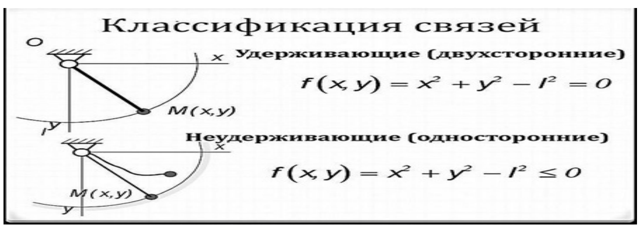
$$\sum_{\nu=1}^{n}\left[\frac{\partial f_\chi}{\partial x_\nu}\delta x_\nu + \frac{\partial f_\chi}{\partial y_\nu}\delta y_\nu + \frac{\partial f_\chi}{\partial z_\nu}\delta z_\nu\right] = 0 \quad \chi = 1,2,\ldots,\vartheta$$

Соотношения выражают условия, налагаемые нестационарными, геометрическими и удерживающими связями на вариации декартовых координат точек СМТ.

Из соотношений следует, что виртуальным перемещением СМТ, состоящей из n МТ, подчиненной ϑ связям, называется совокупность векторов $\delta\bar{r}_1, \delta\bar{r}_2, \ldots, \delta\bar{r}_n$, проекции которых $\delta x_\nu, \delta y_\nu, \delta z_\nu$ ($\nu = 1,2,\ldots,n$) удовлетворяют ϑ варьированным уравнениям связей.

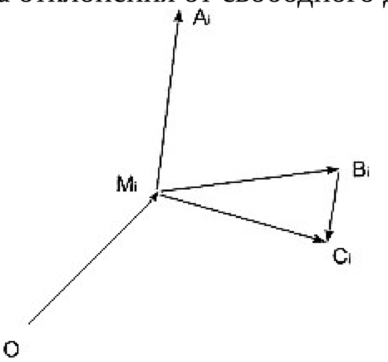
34. Идеальные удерживающие связи.





35. Принцип Гаусса.

Принцип Гаусса, состоит в том, что в каждый момент времени истинное движение системы, находящейся под действием активных сил и подчиненной идеальным связям, отличается от всех кинематически возможных движений, совершающихся из той же начальной конфигурации и с теми же начальными скоростями, тем свойством, что для истинного движения мера отклонения от свободного движения, то есть принуждение, есть минимум.



$$Z = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(w_i - \frac{F_i}{m_i}\right)^2,$$

где N — число точек, входящих в систему, m_i — масса i-й точки, F_i — равнодействующая приложенных к ней активных сил, w_i — ускорение данной точки (в действительности Шеффлер пользовался скалярной формой записи, причём множитель перед знаком суммы у него отсутствовал). После этого математическим выражением принципа наименьшего принуждения стало наличие минимума у функции Z.

36. Уравнения движения механических связанных систем материальных точек.

Пусть механическая система состоит из n свободных (на которые не наложены связи) материальных точек, массы покоя которых m_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$. Пусть на каждую точку системы действуют внешние силы, результирующая которых $\mathbf{F}_\nu^{(e)}$, и внутренние силы, результирующая которых $\mathbf{F}_\nu^{(i)}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$.

Уравнения движения этих точек могут быть записаны в виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{m_\nu \mathbf{v}_\nu}{\sqrt{1-\frac{v_\nu^2}{c^2}}} = \mathbf{F}_\nu^{(e)} + \mathbf{F}_\nu^{(i)},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{m_\nu c^2}{\sqrt{1-\frac{v_\nu^2}{c^2}}} = \mathbf{F}_\nu^{(e)}\cdot\mathbf{v}_\nu + \mathbf{F}_\nu^{(i)}\cdot\mathbf{v}_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Вторая группа этих уравнений может быть представлена в виде:

$$\frac{dT_{r\nu}}{dt} = \mathbf{F}_\nu^{(e)}\cdot\mathbf{v}_\nu + \mathbf{F}_\nu^{(i)}\cdot\mathbf{v}_\nu,$$

где $T_{r\nu}$ — полная энергия точки в специальной теории относительности.

37. Уравнения Лагранжа I рода.

Уравнения Лагранжа первого рода — дифференциальные уравнения движения механической системы, записанные в декартовых координатах и содержащие множители Лагранжа.

Например, для механической системы с голономными идеальными связями уравнение Лагранжа первого рода будет выглядеть как

$$m_i\ddot{r}_i = F_i + \sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha\nabla_i f_\alpha(r_1,\ldots,r_n,t);$$

38. Обобщенные координаты и обобщенные силы.

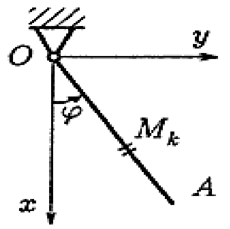


Рис. 78

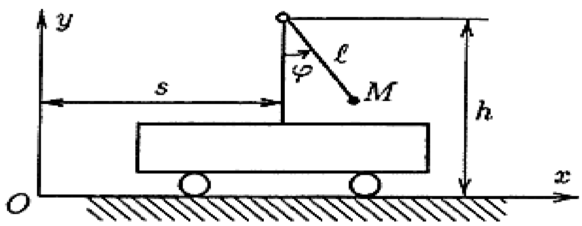


Рис. 79

чечной массы M также легко вычисляются:

$$x_M = s + \ell \sin\varphi; \quad y_M = h - \ell\cos\varphi.$$

Величины φ (пример 1), φ и s (пример 2) являются обобщенными координатами указанных систем. Это понятие можно распространить на случай произвольной механической системы.

Таким образом, *обобщенными координатами механической системы называются любые независимые между собой геометрические величины, однозначно определяющие положение системы в пространстве.* Число обобщенных координат равно числу степеней свободы системы n.

Независимо от геометрического смысла и, соответственно, размерности, обобщенные координаты обозначают единообразным способом, буквой q с номером: q_1, $q_2, \ldots$, q_n. Из того факта, что обобщенные координаты однозначно определяют положение механической системы в выбранной системе координат $Oxyz$, следует, что существуют функции

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t); \\ y_k &= y_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t); \quad (k = 1, 2, \ldots, N) \\ z_k &= z_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t), \end{aligned}$$

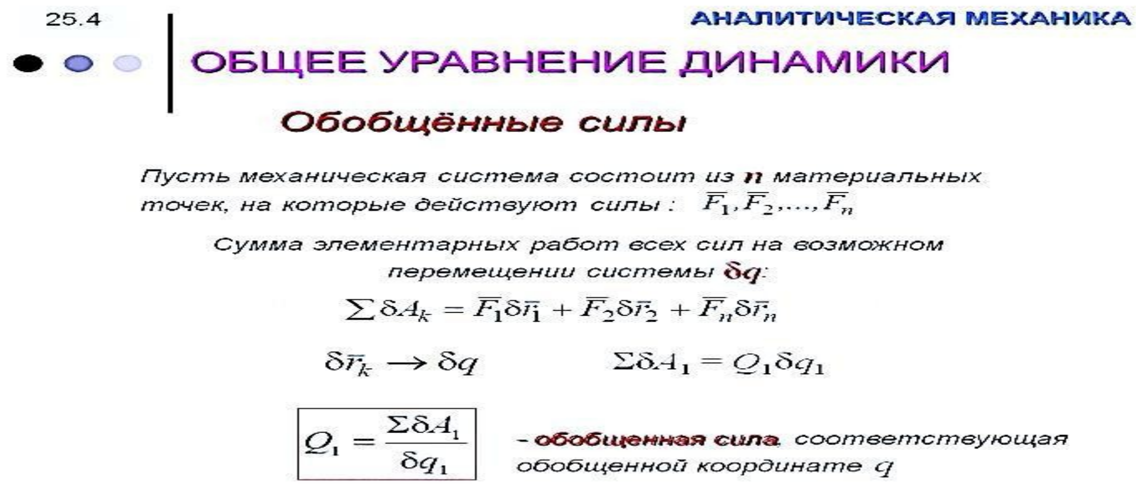
выражающие декартовы координаты всех точек системы через обобщенные координаты и, быть может, время t. Конкретный вид этих функций устанавливается свой для каждой системы (см. примеры 1 и 2).

Если ввести радиусы-векторы точек $\vec{r}_k = (x_k, y_k, z_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, указанные функции можно представить в векторной форме

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \quad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Введем теперь понятие *обобщенной силы.* Зафиксируем систему в произвольный момент времени t и сообщим ей из этого положения возможное перемещение. Пусть в результате обобщенные координа-

113



39. Уравнения Лагранжа II рода.

Если голономная механическая система описывается лагранжианом

$$L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

(q_i — обобщённые координаты, t — время, точкой обозначено дифференцирование по времени) и в системе действуют только потенциальные силы, то уравнения Лагранжа второго рода имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

где i = 1, 2, … n (n — число степеней свободы механической системы). Лагранжиан представляет собой разность кинетической и потенциальной энергий системы.

При наличии и потенциальных, и непотенциальных обобщённых сил появляется правая часть:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^n$$

40. Принцип Даламбера-Лагранжа.

Принцип Д’Аламбера — Лагранжа — один из основных принципов механики, согласно которому, если к заданным (активным) силам, действующим на точки механической системы присоединить силы инерции, то при движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ активных сил и элементарных работ сил инерции на любом возможном (виртуальном) перемещении системы равна нулю.

Принцип Д’Аламбера-Лагранжа является объединением принципа возможных перемещений статики и принципа Д'Аламбера динамики. Его использование позволяет изучать движения механических систем с идеальными связями, не вводя в уравнения движения неизвестные реакции связей.

$$\sum_{i=1}^{N}(\overrightarrow{F_i} - m_i\overrightarrow{w_i})\delta\overrightarrow{r_i} = 0$$

Где m_1, m_2, m_N массы,
активные силы с равнодействующей $\overrightarrow{F_i}$, пассивные силы с равнодействующей $\overrightarrow{N_i}$,
$\delta\overrightarrow{r_1}$, $\delta\overrightarrow{r_2}$, $\delta\overrightarrow{r_N}$ виртуальное (возможное) перемещение.

41. Канонические переменные.

Канонический корреляционный анализ — это способ получения информации из матриц взаимной корреляции.

Если у нас есть два вектора случайных величин, и имеются корреляции среди этих переменных, тогда канонический корреляционный анализ найдёт линейную комбинацию X и Y, которая имеет максимум корреляции.

Если даны два вектор-столбца $X = (x_1, \dots, x_n)'$ и $Y = (y_1, \dots, y_m)'$ случайных величин с конечными вторыми моментами, можно определить взаимную корреляцию $\Sigma_{XY} = \operatorname{cov}(X, Y)$ как $n \times m$ матрицу, элементы (i, j) которой являются ковариациями $\operatorname{cov}(x_i, y_j)$. На практике мы оцениваем ковариационную матрицу, основываясь на выборочных данных из X и Y (т.е. из пары матриц данных).

Канонический корреляционный анализ ищет вектора a ($a \in \mathbb{R}^n$) и b ($b \in \mathbb{R}^m$), такие что случайные величины $a'^T X$ и $b'^T Y$ максимизируют корреляцию $\rho = \operatorname{corr}(a'^T X, b'^T Y)$. Случайные величины $U = a'^T X$ и $V = b'^T Y$ являются ***первой парой канонических переменных***. Затем ищутся вектора, максимизирующие ту же корреляцию с ограничением, что они не коррелируют с первой парой канонических переменных, это даёт ***вторую пару канонических переменных***. Эта процедура может продолжаться до $\min\{m, n\}$ раз.

$$(a', b') = \underset{a,b}{\operatorname{argmax}} \operatorname{corr}(a^T X, b^T Y)$$

42. Функция Гамильтона.

Состояние механической системы, имеющей k степеней свободы, в каждый момент времени t определяется 2k величинами:

k обобщёнными координатами $\acute{q}_i$, определяющими положение системы, и обобщенными скоростями $\acute{q}_i$.

$$H(q,\ p,\ t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q,\ \dot{q},\ t)$$

Если уравнения преобразования, определяющие обобщённые координаты, не зависят от t, можно показать, что H равен полной энергии: E = T + V.

43. Канонические уравнения движения Гамильтона.

Уравнения Гамильтона представляют собой дифференциальные уравнения первого порядка, и, таким образом, их легче решать, чем уравнения Лагранжа, которые являются дифференциальными уравнениями второго порядка.

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j, \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

где точкой над p и q обозначена производная по времени. Система состоит из 2N дифференциальных уравнений первого порядка (j = 1, 2, …, N) для динамической системы, описываемой N (обобщёнными) координатами, являющихся уравнениями движения (одной из форм таких уравнений, наравне с уравнениями Лагранжа, являющейся обобщением ньютоновских уравнений движения) системы, где H = H (q, p, t), где t — время, q — (обобщенные) координаты , и p — обобщенные импульсы.

44. Первый интеграл канонических уравнений.

Система дифференциальных уравнений имеет порядок 2n, разрешена относительно первых производных и задает фазовый поток — преобразование 2n-мерного фазового пространства переменных.

$$g^t: R^{2n} \to R^{2n}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(t, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0), \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}(t, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0), \quad t \in R^1.$$

Здесь (p_0, q_0) — начальные условия — обобщенные импульсы и координаты в момент времени i = 0. Пространство переменных (p, q, t) размерности 2n+ 1 называется расширенным фазовым пространством.

При $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ и $\dot{p}_k$, $\dot{q}_k$, удовлетворяющих каноническим уравнениям , имеем:

$$\frac{dH}{dt} = 0$$

или

$$H(q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s) = \text{const}$$

есть первый интеграл канонических уравнений. Если система консервативна, то, как показано раньше, функция H равна полной механической энергии системы ($H = T + \Pi$) и последний интеграл представляет собой интеграл энергии.

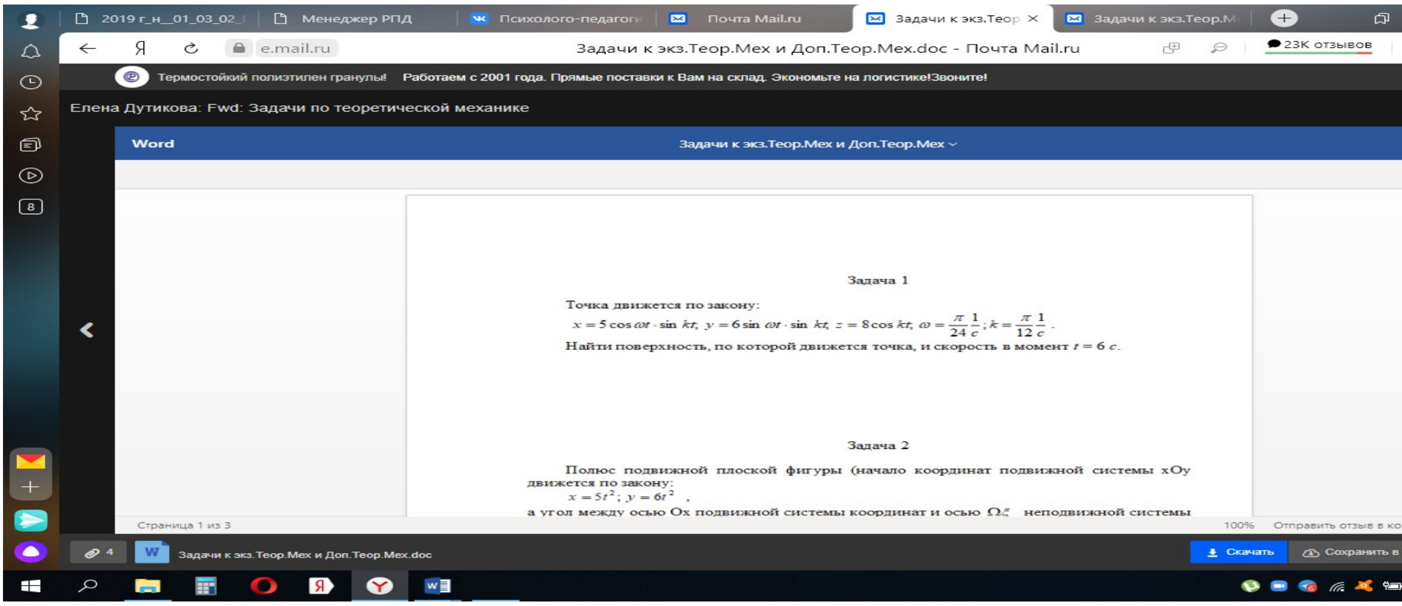
45. Принцип Остроградского-Гамильтона

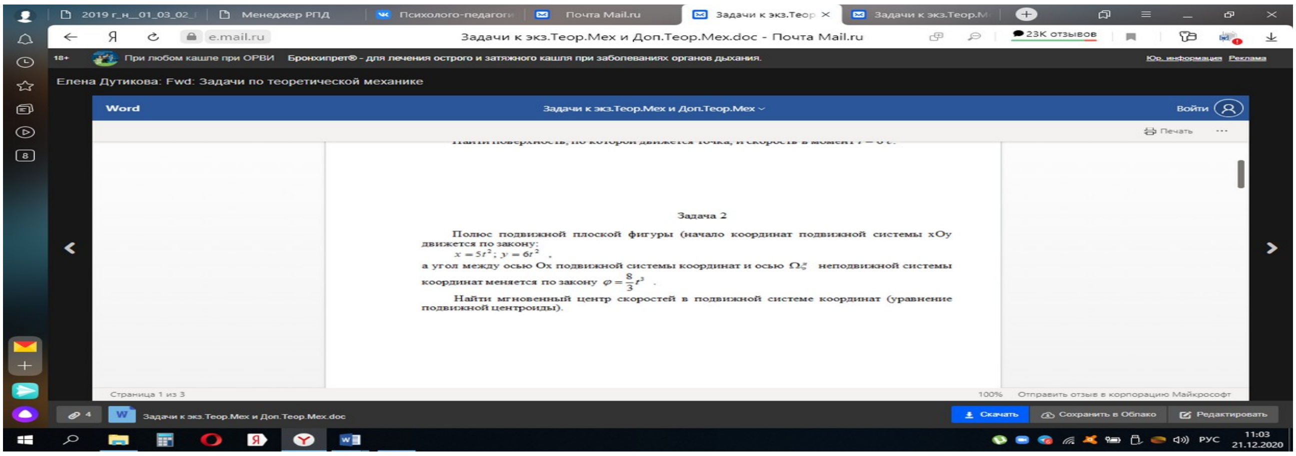
Принцип Гамильтона- Остроградского, стационарного действия принцип,- общий интегральный *вариационный принцип классической механики*, установленный У.Гамильтоном для голономных систем, стесненных идеальными стационарными связями, и обобщенный М. В. Остроградским на нестационарные геометрия, связи. Согласно Г. - О., в действительном движении системы под действием потенциальных сил

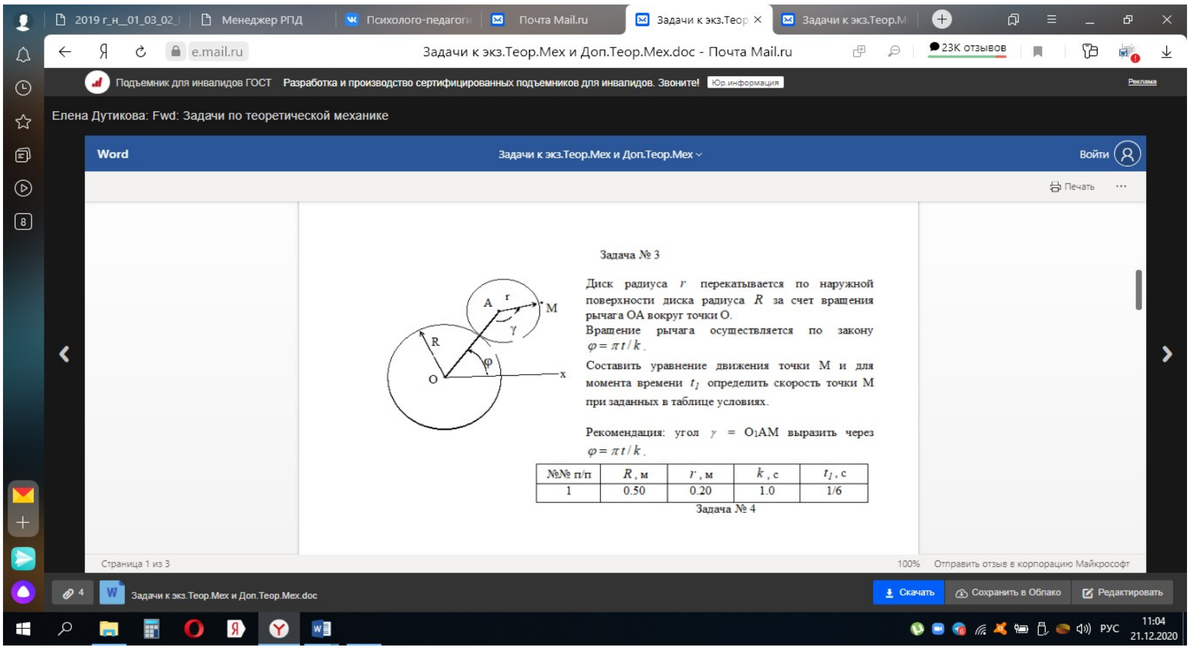
$$S = \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt$$

имеет стационарное значение по сравнению с близкими кинематически-возможными движениями, для которых начальное и конечное положения системы и время движения одинаковы с таковыми для действительного движения. Здесь T - кинетическая, U - потенциальная энергии, L-T - U функция Лагранжа системы.

4.4 База задач к экзамену







Задача № 3

Диск радиуса r перекатывается по наружной поверхности диска радиуса R за счет вращения рычага ОА вокруг точки О.
Вращение рычага осуществляется по закону $\varphi = \pi t / k$.

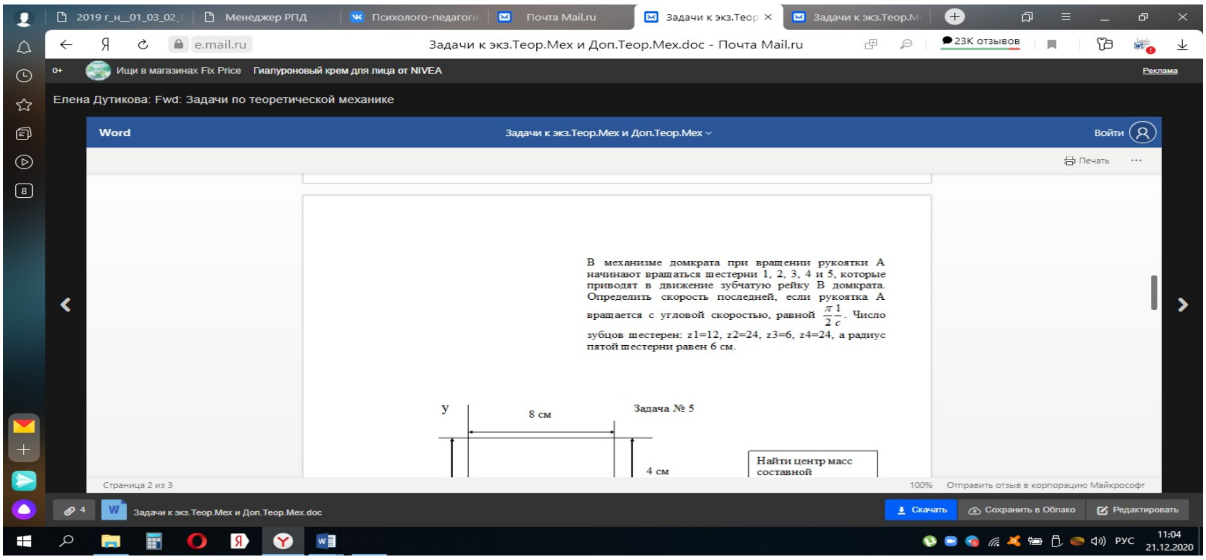
Составить уравнение движения точки М и для момента времени t_1 определить скорость точки М при заданных в таблице условиях.

Рекомендация: угол γ = O₁AM выразить через $\varphi = \pi t / k$.

№№ п/п	R, м	r, м	k, с	t_1, с
1	0.50	0.20	1.0	1/6

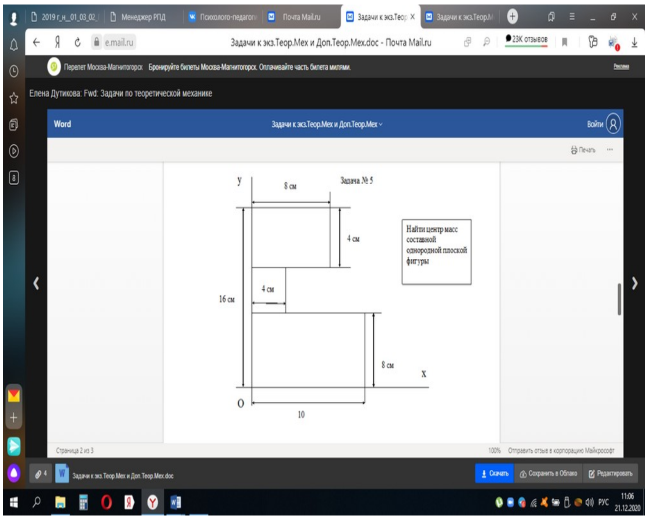
Задача № 4

Задача №4

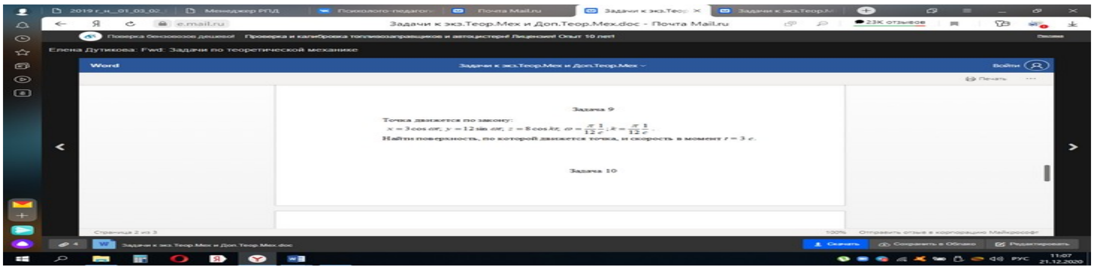


В механизме домкрата при вращении рукоятки А начинают вращаться шестерни 1, 2, 3, 4 и 5, которые приводят в движение зубчатую рейку В домкрата. Определить скорость последней, если рукоятка А вращается с угловой скоростью, равной $\frac{\pi}{2}\frac{1}{c}$. Число зубцов шестерен: z1=12, z2=24, z3=6, z4=24, а радиус пятой шестерни равен 6 см.

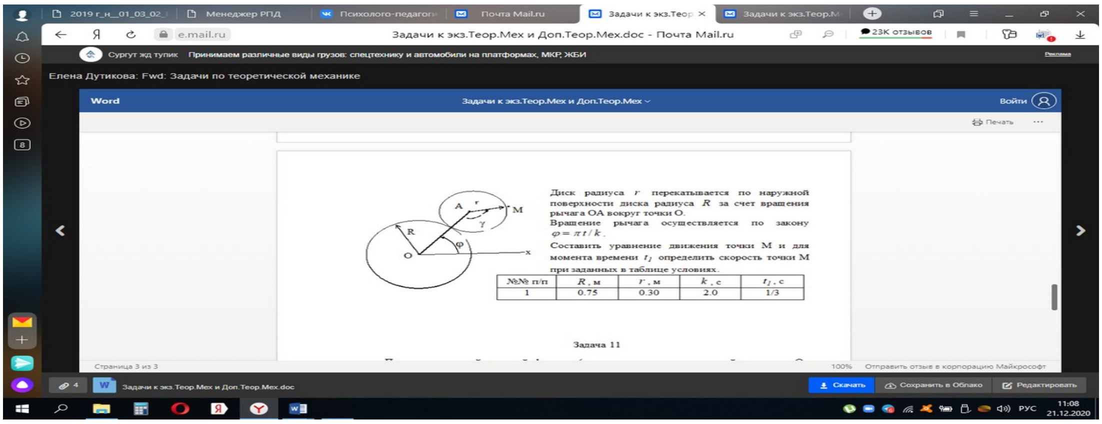
Задача № 5



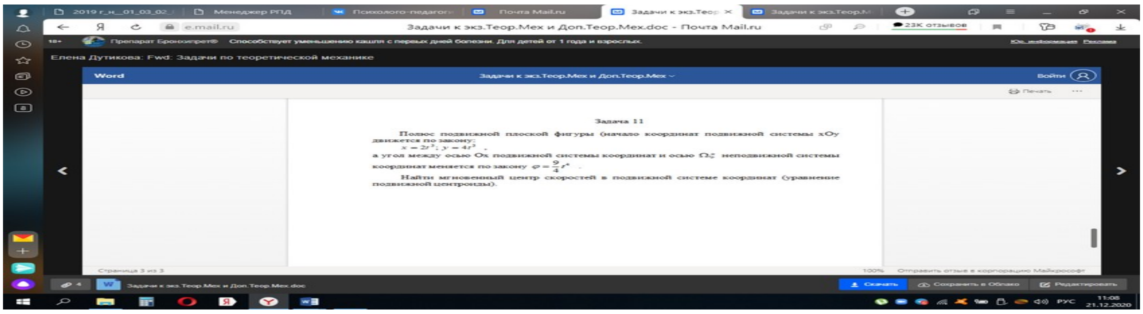
Задача №6



Задача №7



Задача №8



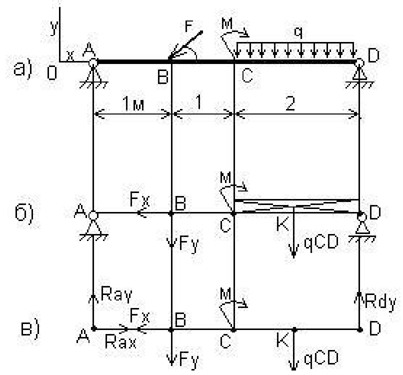
4.5 База типовых задач

№ п/п	Формулировка задачи	Решение/ответ	Код контроли-руемой компетенции
1	Задачи на применение условий равновесия для определения реакций в механических системах.	См. пункт 4.4.1	ОПК-1
2	Задачи на определение траекторий, скоростей, ускорений материальной точки в различных системах координат.	См. пункт 4.4.1	ОПК-1
3	Задачи на определение скоростей, ускорений при сложном движении точки.	См. пункт 4.4.1	ОПК-1
4	Задачи на определение центров масс тел.	См. пункт 4.4.1	ОПК-1
5	Задачи на составление уравнений движения материальной точки, интегрирование уравнений движения.	См. пункт 4.4.1	ОПК-1
6	Задачи на определение моментов инерции твердых тел.	См. пункт 4.4.1	ОПК-1
7	Задачи на применение общих теорем динамики для определения движения материальной точки, системы материальных точек	См. пункт 4.4.1	ОПК-1

4.5.1 Ответы на типовые задачи

1– Задачи на применение условий равновесия для определения реакций в механических системах.

Пример. Определить реакции опор балки.



Решение.

1.Изобразим балку с действующими на нее нагрузками;

2. Изобразим оси координат *x* и *y;*

3. Силу *F* заменяем ее составляющими $F_x = F\cos\alpha$ и $F_y = F\sin\alpha$. Равнодействующая *qCD* равномерно распределенной нагрузки, приложенная в точке пересечения диагоналей прямоугольника, переносится по линии своего действия в середину участка *CD*, в точку *K*.;

4. Освобождаем балку от опор, заменив их опорными реакциями;

5. Составляем уравнения равновесия статики и определяем неизвестные реакции опор.

а) Из уравнения моментов всех действующих на балку сил, составленного относительно одной из точек опор, сразу определяем одну из неизвестных вертикальных реакций:

$$\sum M_A = F_y \cdot AB + M + qCD \cdot AK - R_D \cdot AD = 0$$

$$R_{Dy} = \frac{F_y \cdot AB + M + qCD \cdot AK}{AD} = \frac{10 \cdot 1 + 10 + 2 \cdot 3}{4} = 6{,}5 \text{ кН}$$

b) Определяем другую вертикальную реакцию:

$$\sum M_D = R_{Ay} \cdot AD - F_y \cdot BD + M - qCD \cdot KD = 0$$

$$R_{Ay} = \frac{F_y \cdot BD - M + qCD \cdot KD}{AD} = \frac{F\sin\alpha \cdot BD - M + qCD \cdot KD}{AD} = \frac{20 \cdot 0.5 \cdot 3 - 10 + 2}{4} = 5.5 \text{ кН}$$

c) Определяем горизонтальную реакцию:

$$\sum X = R_{Ax} - F_x = 0\,; \quad R_{Ax} = F_x = F\cos\alpha = 20 \cdot 0.86 = 17.3 \text{ кН}$$

6. Проверяем правильность найденных результатов:

$$\sum Y = R_{Ay} - F_y - qCD + R_{Dy} = 5.5 - 10 - 2 + 6.5 = 0.$$

Условие равновесия $\sum Y_i = 0$ выполняется, следовательно, реакции опор найдены верно.

2 – Задачи на определение траекторий, скоростей, ускорений материальной точки в различных системах координат.

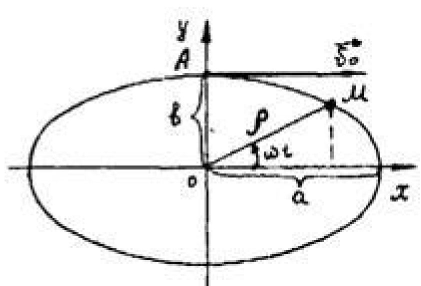
Пример. Точка M движется по эллипсу так, что угловая скорость радиуса-вектора ρ, соединяющего точку M с центром эллипса, постоянна и равна ω. Определить скорость этой точки.

Решение.

Выразим декартовы координаты точки M через полярные координаты ρ и φ, как показано на рисунке.

$x = \rho\cos\omega t, \quad y = \rho\sin\omega t,$ где $\omega t = \varphi$

Подставив эти значения в уравнение эллипса, получим



$$\frac{\rho^2\cos^2\omega t}{a^2}+\frac{\rho^2\sin^2\omega t}{b^2}=1$$

Из последнего равенства для радиуса-вектора имеем

$$\rho=\frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\omega t+a^2\sin^2\omega t}}.$$

Воспользовавшись формулами, найдем радиальную и трансверсальную составляющие скорости

$$V_r=\frac{d\rho}{dt}=\frac{ab\,\omega(b^2-a^2)\sin 2\omega t}{2(a^2\sin^2\omega t+b^2\cos^2\omega t)^{1,5}},$$

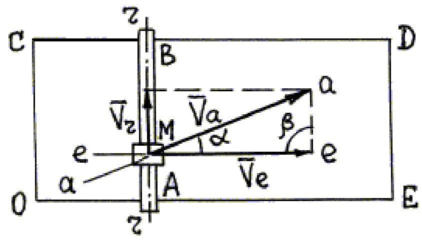
$$V_\varphi=\rho\dot\varphi=\rho\omega=\frac{\omega\cdot a\cdot b}{(a^2\sin^2\omega t+b^2\cos^2\omega t)^{0,5}},$$

$$V=\sqrt{V_r^2+V_\varphi^2}.$$

Уравнения определяются либо из геометрических условий, либо в результате интегрирования дифференциальных уравнений движения точки.

3 – Задачи на определение скоростей, ускорений при сложном движении точки.

Пример. Вдоль цеха по рельсам с постоянной скоростью 0,1 м/с перемещается мостовой кран *AB*, по которому с постоянной скоростью 0,2 м/с движется тележка *M*. Определить абсолютную скорость тележки.



Решение:

1. На расчетной схеме изображена точка *M* (тележка), совершающая сложное движение и подвижное тело – кран *AB* в заданный момент времени.

2. Результаты анализа сложного движения тележки:

- относительное движение – движение тележки *M* по крану *AB*;
- переносное движение – движение крана *AB* относительно цеха *OCDE*;
- абсолютное движение – движение тележки *M* относительно цеха.

3. Проводим через точку *M* линии скоростей. Траектория относительного движения точки *M* – прямая *AB*, поэтому линия *r–r* совпадает с *AB*; переносным движением является поступательное движение крана вдоль стороны *OE* цеха, поэтому линия *e–e* проведена параллельно *OE*; траекторию абсолютного движения точки *M* установить по условию задачи нельзя, поэтому линию *a–a* проводим под некоторым углом α к линии *e–e*, считая α искомой величиной.

4. Построим параллелограмм скоростей: по условию задачи известны направления относительной скорости точки (она равна скорости движения тележки по крану) и переносной скорости (она равна скорости точки крана, с которой в данный момент совпадает тележка); откладываем от точки *M* по линии *r–r* вектор относительной скорости $\bar V_r$, а по линии *e–e* – вектор переносной скорости $\bar V_e$; затем достраиваем параллелограмм скоростей.

5. По условию задачи имеем V_r = 0,2 м/с, V_e = 0,1 м/с, угол $\beta = 90^0$.

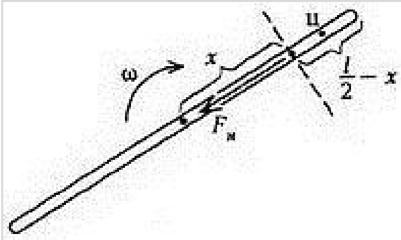
6. Решая треугольник *Mea* , находим

$$V_a=\sqrt{V_r^2+V_e^2}=\sqrt{0{,}2^2+0{,}1^2}=0{,}224 \text{ м/с};$$

$$tg\alpha = \frac{V_r}{V_e} = \frac{0,2}{0,1} = 2$$

4 – Задачи на определение центров масс тел.

Пример. Тонкий однородный стержень длиной l и массой m привели в движение вдоль гладкой горизонтальной поверхности так, что он движется поступательно и одновременно вращается с угловой скоростью ω. Найдите, натяжение стержня в зависимости от расстояния x до его центра.



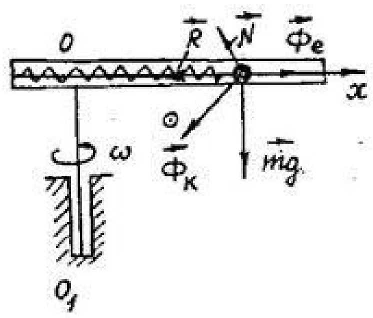
Перейдем в инерциальную систему отсчета, связанную с центром стержня. Рассмотрим движение куска стержня, заключенного между рассматриваемой точкой стержня (расположенной на расстоянии x от центра) и его концом.

Единственной внешней силой для этого куска является искомая сила натяжения Fн, масса равна $\Delta m = m \cdot \frac{\frac{l}{2} - x}{l}$, а его центр масс движется по окружности радиусом $x + \frac{\frac{l}{2} - x}{2} = \frac{l + 2x}{4}$ с ускорением $a_ц = \omega^2 \cdot \frac{l + 2x}{4}$. Записывая уравнение движения центра масс выделенного куска, получим

$$F_н = \Delta m \cdot a_ц = m \cdot \omega^2 \cdot \frac{l^2 - 4x^2}{8l}.$$

5 – Задачи на составление уравнений движения материальной точки.

Пример. Шарик массы m, прикрепленный к концу горизонтальной пружины, коэффициент жесткости которой c, находится в положении равновесия в трубке на расстоянии x_0 от вертикальной оси OO_1. Определить закон относительного движения шарика, если трубка начинает вращаться вокруг вертикальной оси OO_1 с постоянной угловой скоростью ω. Точка O на оси вращения соответствует положению ненагруженной пружины.



Решение. Поместим начало координат оси x в точке O. Изобразим шарик в текущий момент времени в положении, отстоящем от начала координат на расстоянии x. Чтобы найти относительное движение шарика, приложим к нему силу упругости пружины $\overline{R}$, силу тяжести $\overline{P}$, переносную силу инерции $\overline{\Phi}_e$, а также кориолисову силу инерции $\overline{\Phi}_k$ и реакцию стенки $\overline{N}$, расположенные в плоскости, перпендикулярной к оси трубки.

Дифференциальное уравнение относительного движения для рассматриваемой задачи имеет вид

$$m\ddot{x} = -R + \Phi_e.$$

Учитывая, что $R = cx, P = mg, \Phi_e = ma_e = m\omega^2 x$, получим

$$m\ddot{x} = -cx + m\omega^2 x$$ или $$\ddot{x} + (\omega_0^2 - \omega^2)x = 0,$$ где $$\omega_0 = \sqrt{c/m}.$$

Рассмотрим случай, когда $\omega_0 > \omega$. Тогда решение дифференциального уравнения имеет вид

$x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt$ где $k = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}$.

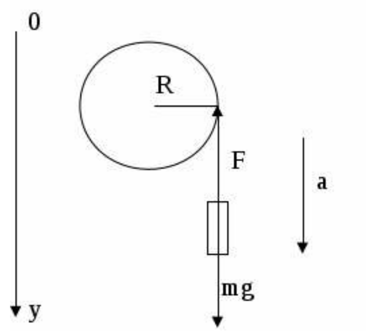
Для определения C_1 и C_2, найдем относительную скорость шарика

$V_r = \dot{x} = -c_1 k \sin kt + c_2 k \cos kt$.

Подставляя в начальные условия $t = 0 \quad x = x_0, \quad \dot{x} = 0$, получим $c_1 = x_0, \quad c_2 = 0$.

Окончательно, закон относительного движения шарика представится в виде $x = x_0 \cos kt$.

6 – Задачи на определение моментов инерции твердых тел.



Пример. На барабан радиусом R=0,5 м и с горизонтальной осью вращения намотан шнур, к концу которого привязан груз массой m = 10 кг. Найдите момент инерции барабана, если известно, что его угловое ускорение равно $\varepsilon = 2\frac{рад}{c^2}$. Трением пренебречь.

Решение:

m = 10 кг, R = 0, 5 м,

J = ?

Вращение барабана происходит под действием силы F. Из второго закона Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}$

Ox: ma = mg – F

F = m (g - a)

ε = Δω/Δt = Δυ/RΔt = a/R → a = εR

F = m (g – ε r)

M = Jε – момент силы через момент инерции для вращающегося тела.

M = Fd = FR – момент силы вращающей барабан.

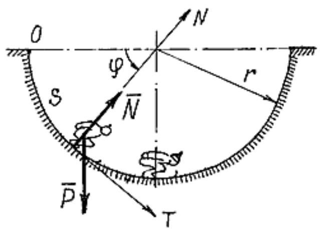
По закону сохранения момента сил

Jε = FR

J = (m (g – εR) R)/ ε = 22,5 (кг м²)

Ответ: 22, 5 кг м2

7 – Задачи на применение общих теорем динамики для определения движения материальной точки, системы материальных точек.



Пример. Лыжник спускается по цилиндрической поверхности радиуса *r*. Определим его движение, пренебрегая сопротивлениями движению.

Решение. Схема решения задачи та же, что и при координатном способе. Отличие лишь в выборе осей. Здесь оси *N* и *T* движутся вместе с лыжником. Так как траектория – плоская линия, то ось *B*, направленную по бинормали, показывать не нужно (проекции на ось *B* действующих на лыжника сил будут равны нулю).

Дифференциальные уравнения получим такие

$$\frac{P}{g}\ddot{s} = P\cos\varphi; \quad \frac{P}{g}\frac{v^2}{r} = N - P\sin\varphi. \qquad (6)$$

Первое уравнение получилось нелинейным: $\ddot{s} = g\cos\varphi$. Так как $s = r\varphi$, то его можно переписать так: $\ddot{\varphi} - \frac{g}{r}\cos\varphi = 0$. Такое уравнение можно один раз проинтегрировать.

Запишем $\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{d\varphi} = \dot{\varphi}\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\varphi}^2}{d\varphi}$. Тогда в дифференциальном уравнении переменные разделятся: $d\dot{\varphi}^2 = 2\frac{g}{r}\cos\varphi\cdot d\varphi$. Интегрирование дает решение $\dot{\varphi}^2 = 2\frac{g}{r}\sin\varphi + C_1$.

Так как при $t = 0$: $\varphi = 0$ и $\dot{\varphi} = \omega_0 = 0$, то $C_1 = 0$ и $\dot{\varphi} = \sqrt{2\frac{g}{r}\sin\varphi}$, а $\dot{s} = r\dot{\varphi} = \sqrt{2gr\sin\varphi}$.

Полученное решение позволяет сделать некоторые выводы. Можно найти скорость лыжника в любом положении как функцию угла φ. Так в нижнем положении, при $\varphi = \frac{\pi}{2}, v = \dot{s} = \sqrt{2gr}$. А из второго уравнения при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ можно определить давление: $N = P + \frac{P}{g}\frac{v^2}{r} = P + \frac{P}{g}\frac{2gr}{r} = 3P$. То есть давление на лыжника в нижнем положении равно его трехкратному весу.

4.6 Критерии оценивания компетенций в ходе промежуточной аттестации

Код компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине	Критерии оценивания			
		Отлично	Хорошо	Удовлетворительно	Неудовлетворительно
ОПК-1	*Знает* - базовые понятия теоретической механики; - математический аппарат кинематики, динамики, аналитической механики;	Студент легко ориентируется в содержании учебного материала, свободно пользуется понятийным аппаратом; знает и правильно применяет формулы;	Студент демонстрирует полное освоение теоретического материала, владеет понятийным аппаратом, ориентируется в изученном материале, осознанно применяет знания для решения практических задач, грамотно излагает свою позицию;	Студент демонстрирует неполное освоение теоретического материала, плохо владеет понятийным аппаратом, плохо ориентируется в изученном материале, неуверенно излагает свою позицию;	Студент имеет разрозненные, бессистемные знания, не умеет выделять главное и второстепенное, допускает ошибки в определении понятий, искажающие их смысл; Беспорядочно и неуверенно излагает материал
	Умеет - решать задачи теоретической механики с использованием базовых знаний физики и математики; - понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	Обладает умением связывать теорию с практикой, высказывать и обосновывать свои суждения; умеет правильно решать задачи и обосновывать свое решение.	Знает и применяет формулы, но допускает небольшие неточности; Решение задачи записано, но не приведены формулы, с помощью которых были проведены расчеты;	Знает отдельные формулы, но допускает значительные неточности в их применении; Решение задачи записано неверно, не приведены формулы, с помощью которых были проведены расчеты, но записан правильный ответ	Не может применять знания для решения практических задач; Решение задачи записано неверно либо отсутствует; Записан неправильный ответ либо не записан ответ

	кинематики, динамики, аналитической механики;				
	Владеет - способностью использовать базовые знания физики и математики для решения задач теоретической механики; -способностью понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат кинематики, динамики, аналитической механики;	Решает задачи на доказательство утверждений, знает доказательство основных теорем; уверенно решает задачи теоретической механики с применением математических экспертных систем.	Решает некоторые задачи на доказательство утверждений, может применить математические экспертные системы для решения задач теоретической механики.	Не решает задачи на доказательство утверждений, не знает доказательство основных теорем; слабо владеет навыками применения экспертных систем для решения задач теоретической механики.	Не решает задачи на доказательство утверждений, не знает доказательство основных теорем; не владеет навыками применения экспертных систем для решения задач теоретической механики.

4.7 Уровни сформированности компетенций в ходе промежуточной аттестации

Уровень освоения компетенций	**Оценка**
Продвинутый	отлично
Базовый	хорошо
Пороговый	удовлетворительно
компетенции не сформированы	неудовлетворительно

Уровни формирования компетенций:

«Пороговый уровень»

- предполагает формирование компетенций на начальном уровне: знание базовых терминов, основных понятий теоретической механики;

- студент способен давать ответы на теоретические вопросы дисциплины, использовать базовые термины; решать основные задачи теоретической механики с использованием знаний математики и физики.

«Базовый уровень»

- предполагает формирование компетенций на более высоком уровне: формируется понимание определений и законов теоретической механики;

- студент способен решать более сложные задачи теоретической механики, умеет выделять основные положения законов теоретической механики.

«Продвинутый уровень»

- предполагает формирование компетенций на высоком уровне, готовность к самостоятельной профессиональной деятельности: формируется знание системы терминов, межпредметные связи; понимание основных положений законов теоретической механики;

- студент способен использовать систему научных понятий теоретической механики, решать задачи на доказательство утверждений теоретической механики, применять теоретические положения для решения практических задач с применением кинематики, динамики, аналитической механики.